1. СИСТЕМА АВТОМАТИЗАЦИИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ВЫЧИСЛЕНИЙ *MATHCAD* 2001

1.1. Входной язык *Mathcad*

1.1.1. Понятие о документах *Mathcad*

Все расчёты в *Mathcad* проводятся в документах, называемых *Worksheets*. Фактически документы *Mathcad* объединяют программу на визуально-ориентированном языке программирования *Mathcad* с результатами её работы и текстовыми и формульными комментариями. Напомним, что визуально-ориентированные языки программирования задают программу не в виде малопонятных кодов, а в виде визуально понятных объектов.

Язык программирования *Mathcad* ориентирован на математические вычисления и потому практически не отличается от обычного языка математических статей, отчётов и книг. Это огромное достоинство системы *Mathcad*. Оно делает документы *Mathcad* вполне понятными даже непрограммистам.

1.1.2. Понятие о входном языке общения и языке реализации *Mathcad*

Как следует из вышесказанного, общение пользователя с системой *Mathcad* происходит на уровне так называемого входного языка, максимально приближённого к обычному языку описания математических задач. Поэтому решение таких задач не требует программирования в общепринятом смысле – написания программ на некотором промежуточном языке или в машинных кодах.

Mathcad является интерпретатором. Это означает, что когда система опознаёт какой-либо объект, она немедленно исполняет указанные в блоке операции. Объектами системы могут быть формульные, текстовые и графические блоки. При этом формульные блоки могут иметь особые признаки – атрибуты активности, пассивности, оптимизации. Они будут рассмотрены в последующих параграфах.

Очень важно запомнить, что *Mathcad* выполняет действия над блоками в строго определённом порядке: блоки анализируются слева направо и сверху вниз. Поэтому нельзя располагать блоки в документе произвольно.

Также важно запомнить, что изменение в выражениях приводят к пересчёту всех последующих выражений (это не относится к символьным операциям, реализуемым с помощью команд меню).

1.2. Начальные сведения о работе в системе *Mathcad*

1.2.1. Первый запуск *Mathcad* 2001

Для того чтобы запустить *Mathcad* в *Windows* 95/98/*Me*/*NT*/2000, нажмите на кнопку "Пуск", затем в открывшемся меню нажмите на пункт "Программы", потом выберите пункт меню "*MathSoft Apps*", наконец, нажмите на пункт меню "*Mathcad* 2001".

После запуска *Mathcad* 2001 на некоторое время появляется заставка системы, которая вскоре сменяется основным окном системы. В окне системы присутствует окно центра ресурсов, дающее доступ к учебнику для новых пользователей, средствам обновления, Интернет-сайту фирмы *MathSoft, Inc.* и средствам коллективной работы над научными проектами.

Обычно при каждом новом запуске системы в центре основного окна появляется окно *Tip of the Day*. Сняв флажок *Show tips on startup*, можно отказаться от появления этого окна при последующих запусках системы.

1.2.2. Создание окна нового документа

Для создания нового окна (документа) можно воспользоваться командой *New* из меню *File*. При выборе этой команды на экране появляется окно, в котором можно выбрать тип создаваемого документа. Чаще всего используется тип *Normal*. Новое окно этого типа – пустое окно с маркером ввода (в виде красного крестика +) в левом верхнем углу.

Если требуется создание документа другого вида можно воспользоваться соответствующим шаблоном из набора предлагаемых типов документов. Для этого нужно подвести указатель мыши к шаблону и нажать на него.

1.2.3. Органы управления окнами

После создания нового окна документа внутри основного окна системы появляется окно редактирования текущего документа. Можно открыть несколько таких окон.

Удерживая левую кнопку мыши после наведения курсора на строку заголовка, можно перемещать окна.

Если подвести указатель мыши к сторонам окна или к его углам, то указатель превращается в двусторонние тонкие стрелки. Эти стрелки указывают направления, по которым окно можно растягивать или сжимать, тем самым меняя его размер.

Возможно также управление окнами различных документов с помощью маленьких кнопок в строке заголовка каждого из окон. В правом верхнем углу окна помещены три такие кнопки.

Левая кнопка сворачивает окно, сохраняя систему *Mathcad* активной. При этом в левом нижнем углу основного окна появляется кнопка со значком окна и его названием.

Средняя кнопка выполняет функции переключения размеров окна: она разворачивает окно на весь экран или сжимает его до меньших размеров, которые можно менять способом, описанным выше.

Правая кнопка служит для закрытия окна. При этом работа с системой *Mathcad* завершается.

1.2.4. Подменю управления окнами

В левом верхнем углу окна (в строке заголовка) имеется значок системы *Mathcad* или её документа. При щелчке на нём появляется системное меню, содержащее команды управления окном. Эти команды перечислены ниже.

Restore (восстановить) – раскрыть окно приложения, если оно свёрнуто в кнопку, или уменьшить его, в противном случае, а именно, в случае, если окно приложения развёрнуто во весь экран.

Move (переместить) – переместить окно приложения.

Size (размер) – изменить размер окна приложения.

Minimize (свернуть) – свернуть окно в кнопку.

Maximize (развернуть) – развернуть окно во весь экран.

Close (закрыть) – закрыть окно и, если это основное окно, закончить работу с приложением.

1.2.5. Работа с панелью задач

Windows – многозадачная система, позволяющая одновременно работать нескольким приложениям. Работа пользователя в каждый момент возможна только с одним приложением. Активное приложение выделяется тёмно-синим цветом строки заголовка. Окна других приложений имеют строку заголовка серого цвета. Окно приложения можно сделать активным, щёлкнув в нём один раз мышью. Также приложение можно сделать активным, выбрав его на панели задач *Windows*.

1.2.6. Упражнения

1. Как запустить *Mathcad*?
2. Как убрать окно *Tip of the Day*?
3. Какие средства дают возможность управления окнами *Mathcad*?
4. Можно ли одновременно работать с *Mathcad* и другими приложениями?
5. Как создать окно нового документа?
6. Можно ли перемещать окна?
7. Для чего используют маленькие кнопки в строке заголовка окна?
8. Что означает команда *Restore*?
9. Какой командой *Mathcad* можно переместить окно приложения?
10. Какой командой *Mathcad* можно изменить размер окна приложения?
11. Как в *Mathcad* свернуть окно в кнопку?
12. Что делает команда *Maximize*?
13. Для чего применяется команда *Close*?
14. Какие признаки позволяют определить активность приложения?
15. С каким числом приложений возможна работа пользователя в каждый момент времени?
16. С помощью какой кнопки можно изменить размер окна?
17. Как изменить размер окна с помощью мыши?
18. Какие указатели присутствуют в окне системы *Mathcad*?
19. Какой тип окна чаще всего используется?
20. Какой вид имеет новое окно?
21. В каком порядке выполняет *Mathcad* действия над блоками?
22. Нуждается ли система *Mathcad* в предварительном программировании вводимой информации?
23. На какие типы задач ориентирована система *Mathcad*?

24. Что происходит с результатами решения численных задач при внесении изменений в их задание?
25. Как изменяются результаты символьных решений задач при внесении изменений в числовые исходные данные?

1.2.7. Выводы

1. *Mathcad* позволяет производить простейшие вычисления без программирования.

2. *Mathcad* имеет окно оперативной подсказки *Tip of the Day*. Его можно убрать.

3. Для организации работы в *Mathcad* существуют различные органы управления.

4. В *Mathcad* можно работать параллельно с работой в других приложениях.

5. В *Mathcad* размеры окна приложения можно менять произвольным образом.

6. *Mathcad* позволяет создавать различные виды документов.

7. В *Mathcad* изменение входной числовой информации ведет к автоматическому пересчету результата решения задачи.

1.3. Интерфейс пользователя

1.3.1. Детали интерфейса

Сразу после запуска система готова к созданию документа с необходимыми пользователю вычислениями. Первая же кнопка панели инструментов (с изображением чистого листа бумаги) позволяет создать новый документ.

В верхней части окна системы *Mathcad* видны шесть характерных элементов интерфейса, перечисленные ниже.

Строка заголовка – строка с именем системы и текущего документа, а также с кнопками управления окном системы.

Строка меню – строка, открывающая доступ к пунктам меню с различными командами.

Панель инструментов – панель с кнопками (значками), обеспечивающими быстрое исполнение наиболее важных команд при работе с системой.

Панель форматирования – панель с кнопками (значками), обеспечивающими быстрое форматирование текстовых и формульных блоков в документах.

Панель вывода палитр математических знаков – панель с кнопками (значками), выводящими палитры специальных математических знаков и греческих букв.

Координатная линейка – линейка с нанесенными на ней делениями, позволяющая точно располагать блоки по горизонтали. Деления показывают расстояния в сантиметрах.

На каждой из панелей имеется область в виде вертикальной черты, за которую можно перетаскивать панели по экрану или фиксировать их в верхней части окна под строкой меню (также их можно разместить по краям окна вертикально).

1.3.2. Курсор ввода и линия раздела страниц

На чистом листе нового документа всегда присутствует вертикальная линия, показывающая границу между двумя соседними листами. Её положение имеет значение только при распечатывании документа.

Для установки курсора в любом месте документа достаточно щёлкнуть левой кнопкой мыши, подведя курсор к необходимому месту.

1.3.3. Строка заголовка

Строка заголовка присутствует у всех *Windows*-приложений. Она отображает название загруженного или вводимого с клавиатуры документа. В левой части строки имеется стандартная кнопка управления окном, а в правой части – три маленькие кнопки.

Каждая из кнопок отвечает за свою операцию: левая кнопка предназначена для свёртывания окна; средняя – для развёртывания его во весь экран и правая – для закрытия окна.

Поместив курсор или стрелку на строку заголовка (зацепив строку заголовка) можно перемещать с помощью передвижения мыши по экрану любые окна.

1.3.4. Меню управления окном документа

Меню управления окном документа отличается от стандартного меню управления окном присутствием пункта "следующее", который активизирует следующий из открытых документов.

1.3.5. Строка меню

В строке меню системы *Mathcad* 2001 представлены следующие заголовки:

File – работа с файлами, сетью Интернет и электронной почтой;

Edit – редактирование документов;

View – изменение способов представления документа и скрытие или отображение элементов интерфейса;

Insert – вставка объектов и их шаблонов;

Format – изменение формата объектов;

Math – управление процессом вычислений;

Graphics – работа с графическим редактором;

Window – управление окнами системы;

Help – работа со справкой, центром ресурсов и электронными книгами.

Меню *Mathcad* – контекстные. Это значит, что число позиций в них и их назначение зависят от состояния системы.

Указанные выше меню характерны для рабочего состояния, когда идёт редактирование документа. Под каждым из заголовков при его нажатии показывается список операций, которые могут быть выполнены. Для выполнения конкретной операции нужно выделить ее курсором и нажать на кнопку мыши.

Для активизации строки меню с клавиатуры достаточно нажать клавишу "*Alt*". После этого с помощью стрелок и клавиши "*Enter*" можно выбрать нужный пункт меню.

Также для активизации необходимой для дальнейшей работы строки меню клавиатуры можно нажимать одновременно "*Alt*" и клавишу с буквой, которая подчёркнута в строке меню.

В раскрытом меню показывается список команд. Недоступные в данный момент команды показываются серым шрифтом. Их нельзя выбрать ни мышью, ни с клавиатуры.

1.3.6. Панель инструментов

Под строкой меню обычно располагается панель инструментов. Она содержит несколько групп кнопок управления, каждая из которых дублирует наиболее важные команды меню. При наведении курсора на кнопку появляется всплывающая подсказка, на которой написана команда, дублируемая кнопкой.

Панель инструментов можно переместить в любую точку экрана в пределах окна *Mathcad*, зацепившись за вертикальную черту.

В пределах панели инструментов можно выделить следующие группы кнопок:

1) кнопки операций с файлами;
2) кнопки печати и контроля;
3) кнопки редактирования;
4) кнопки размещения блоков;
5) кнопки операций с выражениями;
6) кнопки управления компонентами;
7) кнопки управления ресурсами;
8) кнопки форматирования;
9) кнопки палитр математических знаков.

1.3.7. Кнопки операций с файлами

Документы системы *Mathcad* хранятся в виде файлов, то есть имеющих имена блоков информации, содержащихся в устройстве хранения информации. Файлы можно создавать, загружать (открывать), записывать и распечатывать на принтере. Соответственно, файловые операции представлены на панели инструментов первой группой из трёх кнопок:

New (создать) – создание нового документа типа *Normal*;

Open (открыть) – загрузка ранее созданного документа с выбором его файла из диалогового окна;

Save (сохранить) – запись текущего документа с его текущим именем.

Кнопка *Open* открывает стандартное окно открытия файла. В верхней части этого окна находится выпадающий список с деревом каталогов. В центральной области окна находится список файлов, содержащихся в текущем каталоге. После выбора файла для его открытия достаточно нажать кнопку с надписью *Open* (Открыть).

1.3.8. Кнопки печати и контроля

Эта группа тоже представлена тремя кнопками:

Print (печать) – распечатка документа на принтере;

Print Preview (предварительный просмотр) – предварительный просмотр документа;

Check Spelling (правописание) – проверка орфографии в документе.

1.3.9. Кнопки редактирования

Во время подготовки документов их приходится изменять и дополнять – редактировать. Следующие три кнопки служат для выполнения операций редактирования документов:

Cut (вырезать) – перенос выделенной части документа в буфер обмена с очисткой этой части документа;

Copy (копировать) – копирование выделенной части документа в буфер обмена. При этом выделенная часть не удаляется;

Paste (вставить) – вставка содержимого буфера обмена в текущую позицию курсора.

Буфер обмена предназначен для временного хранения блоков информации.

Следующие две кнопки также предназначены для редактирования документов:

Undo (отменить ввод) – отмена предшествующей операции редактирования;

Redo (вернуть ввод) – повторение ранее отменённой операции редактирования.

1.3.10. Кнопки размещения блоков

Все документы *Mathcad* состоят из блоков. Их расположение имеет значение при выполнении вычислений, так как они выполняются по порядку слева направо и сверху вниз. Для их выравнивания предназначены следующие две кнопки:

Align Across (выровнять по горизонтали) – блоки выравниваются по горизонтали;

Align Down (выровнять вниз) – блоки выравниваются по вертикали, располагаясь сверху вниз.

1.3.11. Кнопки операций с выражениями

Формульные блоки часто являются вычисляемыми выражениями или выражениями, входящими в состав заданных пользователем новых функций. Для работы с выражениями служат следующие кнопки:

Insert Function (вставить функцию) – вставить функцию из списка, появляющегося в диалоговом окне;

Insert Unit (вставить единицу) – вставить размерную единицу;

Calculate (вычислить) – вычислить выделенное выражение.

Mathcad имеет множество встроенных функций. Все они перечисляются в списке, вызываемом кнопкой *Insert Function*, поэтому необязательно запоминать синтаксис всех функций.

Если документы большие, то при их изменениях не всегда выгодно запускать вычисления с самого начала. В этом случае можно воспользоваться кнопкой *Calculate*. Вычисления будут произведены для выделенного выражения, претерпевшего изменения, и их результаты можно поместить туда, где они требуются для продолжения работы.

1.3.12. Кнопки управления компонентами

Insert Hyperlink (вставка гиперссылки) – создаёт гиперссылку.

Component Wizard (мастер компонентов) – открывает окно, дающее удобный доступ ко всем компонентам системы.

1.3.13. Кнопки управления ресурсами

Для оперативного изменения масштаба отображения символов в текущем окне на панели инструментов имеется раскрывающийся список *Zoom* (масштаб). В поле раскрывающегося списка отображается значение выбранного масштаба, а кнопка с направленной вниз стрелкой раскрывает список стандартных значений.

В эту группу входят ещё две кнопки:

Resource Center (центр ресурсов) – открывает центр ресурсов;

Help (справка) – открывает справочную систему.

Справочная система должна быть предварительно загружена. В противном случае появится окно с информацией о том, что данная система не найдена.

1.3.14. Кнопки форматирования

Кнопки форматирования позволяют изменять формат текста, как и обычный текстовый редактор:

Style (стиль) – выбор стиля отображения текстовых блоков;

Font (шрифт) – выбор шрифта для символов;

Font Size (размер шрифта) – выбор размера шрифта;

Bold (полужирный) – выбор полужирного начертания шрифта;

Italic (курсив) – выбор наклонного начертания шрифта;

Underlined (подчёркнутый) – установка подчёркивания символов;

Align Left (по левому краю) – выравнивание строк по левой границе;

Align Center (по центру) – выравнивание строк по центру;

Align Right (по правому краю) – выравнивание строк по правой границе;

Bullets (маркеры) – создание маркированного списка;

Numbering (нумерация) – создание нумерованного списка.

1.3.15. Кнопки палитр математических знаков

Палитры математических знаков служат для вывода шаблонов математических операторов, функций, символов.

Для вывода шаблона того или иного объекта с помощью палитры нужно:

1) вывести нужную палитру;

2) выбрать необходимый шаблон в палитре.

Кнопки вывода палитр находятся в нижнем ряду кнопок (в стандартном виде).

Несмотря на присутствие палитр математических знаков, все операторы, функции и символы можно вводить и с клавиатуры.

Подробнее палитры математических знаков будут рассматриваться в последующих параграфах.

1.3.16. Упражнения

1. Какие элементы составляют интерфейс системы *Mathcad*?
2. Что включено в строку меню системы *Mathcad*?
3. Для чего нужны кнопки операций с файлами?
4. Что можно сделать, используя кнопки печати и контроля?

5. Какие кнопки редактирования имеются в *Mathcad*?
6. Для чего используются кнопки размещения блоков?
7. Какие действия позволяют выполнять кнопки операций с выражениями?
8. В каких случаях используются кнопки управления компонентами?
9. Для чего применяются кнопки управления ресурсами?
10. Какие операции позволяют выполнить кнопки форматирования?
11. Какие возможности дают кнопки палитр математических знаков?
12. Для чего может быть использована опция *Help* меню?
13. Каково назначение опции *Format* меню?
14. В каких целях используется опция *Edit* меню?
15. Для управления какими процессами используется опция меню *Math*?
16. Когда используется опция *Graphics* меню?
17. Для чего может быть использована опция *Insert* меню?
18. Измените вид окна *Mathcad*, убрав отдельные панели.
19. Создайте новый документ сначала с помощью кнопки *New*, а затем с помощью команды *New* меню *File*.
20. Уберите линию раздела страниц.
21. Введите шаблоны нескольких различных операторов.
22. Измените размеры элементов документа.

1.3.17. Выводы

1. Панель инструментов обеспечивает удобное пользование различными инструментами *Mathcad*.

2. Размеры элементов документа можно изменять.

3. Кроме полноценной помощи, существуют всплывающие подсказки.

4. Кнопки форматирования позволяют изменять формат текста, как и обычный текстовый редактор.

5. Палитры математических знаков служат для вывода шаблонов математических операторов, функций, символов.

6. Все документы *Mathcad* состоят из блоков. Их расположение имеет значение при выполнении вычислений, так как они выполняются по порядку слева направо и сверху вниз.

7. Меню *Mathcad* – контекстные: число позиций в них и их назначение зависят от состояния системы.

1.4. Работа с текстом и выполнение простейших математических операций

1.4.1. Работа с текстом

Текст в *Mathcad* необходим прежде всего для создания документов, понятных не только разработчику. Именно комментарии делают документы документами в общепринятом смысле этого слова.

В простейшем случае для ввода текстового комментария достаточно ввести символ " (двойные кавычки). В появившемся прямоугольнике можно вводить текст. В текстовой области курсор имеет вид вертикальной черты. Стиль текста можно изменять с помощью кнопок форматирования.

Текстовый блок имеет маркеры изменения размера в виде маленьких чёрных прямоугольников, уцепившись за которые, размеры блока можно увеличивать или уменьшать. Размер текста при изменении размера блока не изменяется.

Блок можно перемещать, удерживая его за рамку. Если в начале перемещения нажать клавишу Ctrl, то будет выполняться перенос блока с его сохранением на первоначальном месте.

Для завершения ввода текста достаточно перевести указатель мыши за пределы блока и щёлкнуть кнопкой мыши или нажать комбинацию клавиш *Ctrl + Shift + Enter*.

Для коррекции текста необходимо подвести указатель мыши к тому месту, где будет производиться изменение введенного ранее и щёлкнуть левой кнопкой мыши.

1.4.2. Построение выражений

Многие математические выражения можно создавать, просто печатая последовательность символов. Часть символов – буквы и цифры – служит для ввода чисел и имён функций и переменных, другие символы, подобно * и + , служат для создания операторов.

При редактировании выражений в *Mathcad* используется выделяющая рамка. Важно запомнить, что заключённая в рамку часть выражения становится операндом следующего вводимого оператора.

Необходимость использования выделяющей рамки покажем на примере.

Если набрать: 1*2–3*4/5^2, то получим следующее:

$$1\cdot 2-3\cdot\frac{4}{5^{2}}$$

Если перед набором знака деления выделить всё выражение рамкой (нажимая на пробел, пока всё выражение не окажется подчёркнутым: $\underline{1\cdot 2-3\cdot 4}$), то получим следующее:

$$\frac{1\cdot 2-3\cdot 4}{5^{2}}$$

1.4.3. Операции присваивания значения и вычисления

Для присвоения переменной какого-либо численного значения достаточно после введения переменной нажать на клавишу = и ввести численное значение.

Такой способ присвоения переменной численного значения применим только в случае начального присвоения. Если переменной уже присваивалось значение, то нажатие на клавишу = приведёт к тому, что *Mathcad* покажет это значение. Для присвоения нового значения в этом случае необходимо нажать на клавишу со знаком двоеточия.

Для вычисления любого выражения достаточно после него ввести знак равенства. После выполнения вычислений результат будет выведен в строке выражения сразу за поставленным знаком равенства.

1.4.4. Использование шаблонов и функций

Для того чтобы ввести выражение с использованием шаблона из палитры, достаточно нажать на кнопку с необходимым шаблоном. После этого в документе появляется шаблон с местами ввода чисел или переменных, обозначенных маленькими чёрными прямоугольниками. Установив курсор в место ввода, необходимо ввести число или переменную. После этого ввод выражения с использованием шаблона заканчивается.

Сложные математические выражения наряду с операторами содержат математические функции. Для облегчения ввода математических функций служит кнопка 

, которая выводит окно с полным перечнем функций, разбитым на тематические разделы. Выбранная функция вводится в документ после нажатия на кнопку *OK* или *Insert* (вставить). Функции, также как и шаблоны, имеют места ввода.

1.4.5. Упражнения

1. Введите в документ текстовый блок с надписью:
а) "тренировка"; б) "обучение"; в) "задача"; г) "пример № 15";
д) "решение"; е) "ответ"; ж) " машина"; з) "операция";
и) "уравнение"; к) "метод вычислений"; л) "алгоритм";
м) "корень уравнения"; н) "неравенство"; о) "функция".
2. Проведите форматирование надписи.
3. Проведите следующие вычисления:

а) $1 + 7$; б) $3 \cdot 10$; в) $\frac{5}{7}+\frac{3}{13}$; г) $0,4 + 0,3$; д) $0,4 \cdot 0,7$;

е) $7\frac{3}{11}-\frac{5}{19}$; ж) $0,2 + \frac{1}{3}$; з) 2^6; и) $5{,}123^3 \cdot 1{,}651^4$; к) $\frac{5}{7}+\frac{1}{9}$;

л) $0{,}76+\frac{1}{3}$; м) $\frac{35}{97}+\frac{41}{88}$; н) $211^2 \cdot 162^3$; о) $167,398 \cdot 0,3785$;

п) $3489,31 \cdot 1,2$; р) $5437,45 : 1765,876$; с) $6789,973 : 11,984$;

т) $17^2 \cdot \frac{31}{121}-\frac{5^2 \cdot 17}{19^3}$; у) $3{,}4^3 : \frac{14^{-2}}{72^{-2}} \cdot 19 - \frac{81^2}{13^4} \cdot \frac{125^4}{347^6}+\frac{111^3}{213^4}$;

ф) $65 \cdot 13^{-2} : \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{11} - \frac{11}{9} : 141^{-2} \cdot 35^2$; х) $177 : \frac{35}{178} - \frac{15}{94} \cdot \frac{77}{89} : \frac{23^5}{36^6}$;

ц) $65\frac{3}{11} - 75\frac{5}{19} : 87\frac{34}{67}$; ч) $71{,}345 \cdot \frac{3}{11} - 45{,}788 : \frac{5}{19} \cdot 2^{11}$.

4. Вычислите значения функций в заданных точках:

а) $\sin x, \cos x$ при x = 0, 0037; 0, 0368; 0, 3465; 0, 465; 0, 571; 0, 64382;

б) $e^x, \log_4 x$ при x = 0, 654; 0, 2458; 0, 36576; 0, 465; 1, 463; 2, 376; 4, 0785; 1, 332; 1, 4356; 1, 9821; 0, 99832; 2, 1112354; 0, 786549834;

в) $\arcsin x, \arccos x$ при x = – 0, 3114562; – 0, 036338; 0, 34616644825; 0, 0468565; 0, 87434732; 0, 99876; 0, 989943; 0, 876543; 0, 765412;

г) $\mathrm{tg}\, x$, $\mathrm{ctg}\, x$ при x = 0, 0031277; 0, 0389668; 0, 34789651; 0, 46789115; 1, 57213379; 3, 5698437; 4, 53321; 8, 235234; 9, 123523; 10, 54326;

д) $\sqrt[3]{x}, x^{-2}$ при x = 0, 0058; 0, 0118; 0, 2315; 0, 4785; 1, 389; 3, 142553; 6, 1213; 8, 965437; 25, 875948; 635, 2315499; 7845, 5423; 23199, 434356;

е) $x^8, \frac{1}{x^5+136}$ при x = 37, 541; 13, 0368; 4, 3465; – 1, 42365; 1, 591171; 3, 145567; 4, 675892; 6, 542311; 7, 452399; 0, 123721; 0, 76547; 0, 21415;

ж) $\mathrm{arctg}\, x$, $\mathrm{arcctg}\, x$ при x = 3, 789; 0, 0368; 1, 3465; 2, 67345; 4, 414671; 3, 567; 6, 123876; 9, 3254; 2, 17654; 2, 95431; 1, 37778; 1, 972111;

з) $\dfrac{\sqrt{7+x}-3}{x^2-4}$ при x = 3, 756; 6, 7898; 7, 8543; 10, 465; 11, 571; 13, 567; 14, 532; 4, 112657; 3, 55312; 3, 87645; 43, 895412; 65, 2131; 44, 337765;

к) $\dfrac{\sin x}{x^2+1}$ при x = 0, 0037; 0, 0368; 0, 3465; 0, 465; 1, 571; 3, 567; 4, 53; 1, 0037; 2, 0368; 3, 3465; 4, 465; 5, 571; 6, 56712; 3б 54231;

л) $\dfrac{\sqrt{x^2-x}+13}{x^4-4x+4}$ при x =1, 0037; 2, 0368; 3, 3465; 4, 465; 5, 571; 6, 567; 0, 0037; 0, 0368; 0, 3465; 0, 465; 1, 571; 1, 371; 1, 568; 1, 789; 0, 465;

м) $\sin\dfrac{\pi}{x}$ при x = 0, 37; 0, 68; 3, 465; 4, 65; 5, 71; 6, 734; 7, 321; 8, 324; 9, 43; 13, 1211; 0, 8765; 32, 11335; 23,87611; 37,896711; 61, 11999345;

н) $x\sin\dfrac{\pi}{x}$ при x = 1, 371; 1, 568; 1, 789; 0, 465; 0, 713; 0, 0567; 0, 0453;

о) $\dfrac{\sqrt{x^2-2x+6}-\sqrt[3]{x^3+3x-7}}{x^4-4x+3}$ при x = 0, 723; 1, 815; 2, 478; 4, 5553; 8, 1678; 11, 348967; 2, 3456; 3, 7654; 8, 6453; 6, 231451; 2, 1133468; 2, 9782; 3, 124; 3, 465; 4, 571; 5, 567; 6, 5233; 6, 6783; 9, 5634; 11, 9742; 23, 7564;

п) $e^{\sqrt{x}}$, $\log_7 x$ при x = 0, 0037; 0, 0368; 0, 3465; 0, 465; 1, 571; 3, 56387; 4, 5553; 8, 1678; 11, 3467; 2, 3456; 3, 7654; 8, 6453; 6, 231451; 2, 113342;

р) arctg x, arcctg x при x = – 0, 3227; 0, 1618; 0, 5354; 1, 545; –1, 571; 13, 5617; 14, 513; 23, 3412; 2, 3564; 2, 8769; 2, 6453; 3, 76511; 4, 321156;

с) e^{3x}, $\log_9 x$ при x = 0, 0317; 0, 03168; 0, 3458; 0, 846995; 1, 156785; 3, 788; 4, 5312; 6, 1312; 6, 5342; 5, 567; 6, 5233; 6, 6783; 0, 0368; 0, 3465;

т) arctg x, arcctg x при x = 1, 347; – 3, 128; 0, 3465; – 0, 4675; 1, 57561; 3, 567; – 4, 75453; 0, 3465; 14, 513; 23, 3412; 0, 465; 1, 571; 4, 578.

1.4.6. Выводы

1. В *Mathcad* можно использовать обычный текст, который можно форматировать, как в обычном текстовом редакторе.
2. В *Mathcad* можно производить различные вычисления.
3. В *Mathcad* используются элементы программирования, например, присваивание значения переменной.
4. *Mathcad* автоматизирует арифметические вычисления.
5. *Mathcad* вычисляет значения различных функций при любых значениях аргумента из области их определения.

2. ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

2.1 Вычисление определителя матрицы $n \times n$

Для введения матрицы в документ можно вывести панель векторов и матриц (*vector and matrix toolbar*), а затем выбрать шаблон матрицы (*matrix or vector*). Также можно воспользоваться командой *Matrix* меню *Insert* (вставка).

Матрица – математический объект в виде таблицы, который характеризуется числом строк (*rows*) и столбцов (columns). В *Mathcad* элементами матрицы могут быть числа, константы, переменные и даже математические выражения. При введении шаблона матрицы в документ появляется диалоговое окно, в котором необходимо ввести размерность матрицы, то есть число ее строк и столбцов.

Шаблон, введённый в документ, содержит места ввода элементов матрицы. Место ввода можно сделать активным, щёлкнув на нём мышью. С помощью клавиш перемещения курсора можно ввести все элементы матрицы.

Обращение к элементам матрицы производится с помощью имени матрицы и индексов элемента. Индексы вводятся с помощью клавиши "]" и разделяются запятой. Первый индекс соответствует номеру строки, а второй – номеру столбца матрицы, содержащей элемент.

Нижняя граница индексов по умолчанию начинается с нуля. Она определяется встроенной переменной *ORIGIN*, которую можно поменять с помощью команды *Options* меню *Math*.

Для работы с векторами и матрицами система *Mathcad* поддерживает ряд операторов и функций. Здесь мы рассмотрим основные из них.

Сначала напомним, что называется определителем.

Понятие определителя вводится только для квадратных матриц, то есть матриц с равным числом строк и столбцов. Число строк (столбцов) определяет порядок квадратной матрицы, и этот же порядок присваивается соответствующему матрице определителю.

Определителем первого порядка называется число $|a_{11}| = a_{11}$.

Определителем второго порядка называется число

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

где $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ – элементы матрицы, определитель которой нужно вычислить.

Определитель третьего порядка – это число

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} -$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Вычисление определителей четвертого и последующих порядков сводится к вычислению определителей второго и третьего порядков.

Порядок определителя – это число его строк и столбцов.

Определителем n -го порядка называется число, вычисленное по определенным правилам на основе чисел, заданных квадратной таблицей из n строк и n столбцов.

Матрица, все элементы которой равны нулю, называется *нулевой*.

Матрица, у которой элементы, стоящие на главной диагонали, равны единице, а все остальные элементы равны нулю, называется *единичной*. Ее определитель равен единице.

Матрица называется *вырожденной*, если её определитель равен нулю.

Примерами вырожденных матриц являются матрицы, содержащие строки или столбцы из одних нулевых элементов, матрицы, имеющие два одинаковых столбца или две одинаковых строки.

Матрицы, все элементы которой выше главной диагонали или ниже главной диагонали равны нулю, называется *треугольной*.

Определитель треугольной матрицы равен произведению элементов, стоящих на ее главной диагонали.

В *Mathcad* имеется возможность вычислять определитель любой матрицы и с любой заданной точностью вычислений.

Определитель матрицы вычисляется с помощью оператора "$|A|$", где A – заданная в задаче матрица.

Например, операция вычисления определителя в *Mathcad* запишется в виде двух операций, а именно, задания матрицы A и вывода ее определителя (сами действия по вычислению определителя при этом не отображаются на экране):

$$A := \begin{pmatrix} 5 & 20 & 5 & 3 \\ 4 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 6 \\ -3 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad |A| = -999.$$

2.2. Вычисление обратной матрицы

Обратной матрицей для данной квадратной матрицы A называется такая матрица A^{-1}, произведение на которую матрицы A справа и слева является *единичной* матрицей:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E.$$

Для невырожденной квадратной матрицы A существует единственная обратная матрица A^{-1}.

Для вычисления обратной матрицы для исходной матрицы A достаточно напечатать: $A^{-1} =$.

Например:

$$A := \begin{pmatrix} 5 & 20 & 5 & 3 \\ 4 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 6 \\ -3 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \ A^{-1} = \begin{pmatrix} -0.013 & 0.135 & 0.038 & -0.162 \\ 0.054 & 0.054 & -0.081 & 0.135 \\ 0.019 & -0.351 & 0.175 & -0.378 \\ -0.037 & 0 & 0.185 & 0 \end{pmatrix}.$$

2.3. Определение ранга матрицы

Линейной комбинацией элементов a и b некоторого множества однородных математических объектов называется их сумма $\alpha a + \beta b$, где α и β – числа. Если строка (столбец) матрицы может быть получена в результате линейной комбинации других ее строк, говорят, что строка *линейно зависима* от этих строк.

Рангом матрицы A называется максимальное число линейно независимых строк (столбцов) матрицы A.

Для определения ранга матрицы можно воспользоваться функцией $rank(M)$, которая возвращает ранг матрицы M.

Например:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 6 & 8 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad rank(A) = 3$$

$$B := \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 1 \\ 7 & 2 & 3 & 2 \\ 10 & 6 & 8 & 3 \end{pmatrix}, \quad rank(B) = 2 \quad .$$

2.4. Решение систем линейных алгебраических уравнений

Решением системы линейных алгебраических уравнений называется такое значение вектора неизвестных, при подстановке которого все уравнения системы удовлетворяются тождественно.

Для решения систем линейных алгебраических уравнений с использованием матричных операций необходимо представить систему уравнений в виде: $AX = B$, где A – матрица коэффициентов системы линейных уравнений, B – вектор свободных членов, X – вектор неизвестных. После введения матрицы коэффициентов системы линейных уравнений и вектора свободных членов вектор неизвестных определяется следующим образом: $X = A^{-1}B$.

Например:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 4; \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1; \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0; \\ x_1 + x_2 - 4x_3 = 9. \end{cases}$$

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -4 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B := \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix},$$

$$X := A^{-1} \cdot B, \qquad X = \begin{pmatrix} 1.556 \\ 0.333 \\ -1.778 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Системы линейных алгебраических уравнений в Mathcad не обязательно решать с помощью матричных операций, о чём будет сказано в следующих главах.

2.5. Упражнения

1. Вычислить определители следующих матриц:

а) $\begin{pmatrix} 20 & 43 & 2 & 5 & 11 \\ 1 & 30 & 10 & 3 & 2 \\ 3 & 71 & 2 & 51 & 9 \\ 5 & 5 & 7 & 9 & 34 \\ 7 & 4 & 6 & 8 & 23 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 93 & 1 & 33 & 6 & 81 \\ 4 & 3 & 8 & 9 & 3 \\ 16 & 13 & 48 & 2 & 1 \\ 3 & 17 & 30 & 47 & 9 \\ 4 & 83 & 55 & 3 & 6 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 1 & 8 & 3 & 5 & 2 \\ 7 & 8 & 5 & 3 & 9 \\ 3 & 6 & 5 & 5 & 3 \\ 8 & 7 & 3 & 2 & 4 \\ 9 & 1 & 6 & 3 & 7 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 3 & 7 & 8 & 3 & 4 \\ 13 & 15 & 16 & 71 & 81 \\ 25 & 50 & 3 & 6 & 19 \\ 31 & 4 & 6 & 7 & 41 \\ 3 & 8 & 33 & 2 & 7 \end{pmatrix}$;

д) $\begin{pmatrix} 76 & 67 & 11 & 34 & 54 \\ 19 & 54 & 14 & 33 & 27 \\ 16 & 22 & 56 & 17 & 76 \\ 53 & 43 & 32 & 78 & 92 \\ 17 & 32 & 53 & 18 & 37 \end{pmatrix}$; е) $\begin{pmatrix} 12 & 153 & 16 & 115 & 23 \\ 75 & 22 & 48 & 56 & 17 \\ 52 & 71 & 42 & 51 & 39 \\ 21 & 54 & 73 & 9 & 18 \\ 86 & 24 & 34 & 53 & 31 \end{pmatrix}$;

ж) $\begin{pmatrix} 56 & 63 & 21 & 31 & 34 \\ 11 & 53 & 18 & 37 & 57 \\ 15 & 28 & 95 & 67 & 71 \\ 57 & 13 & 32 & 78 & 84 \\ 123 & 39 & 73 & 15 & 81 \end{pmatrix}$; з) $\begin{pmatrix} 30 & 13 & 27 & 57 & 31 \\ 15 & 10 & 13 & 35 & 22 \\ 33 & 11 & 21 & 53 & 91 \\ 52 & 54 & 78 & 92 & 37 \\ 71 & 41 & 69 & 18 & 28 \end{pmatrix}$;

и) $\begin{pmatrix} 36 & 40 & 11 & 12 & 34 \\ 41 & 53 & 28 & 39 & 17 \\ 25 & 28 & 75 & 23 & 13 \\ 54 & 13 & 32 & 65 & 15 \\ 45 & 39 & 73 & 15 & 92 \end{pmatrix}$; к) $\begin{pmatrix} 35 & 13 & 271 & 57 & 30 \\ 19 & 10 & 113 & 35 & 12 \\ 31 & 11 & 111 & 53 & 54 \\ 59 & 54 & 110 & 92 & 27 \\ 71 & 41 & 61 & 18 & 22 \end{pmatrix}$;

л) $\begin{pmatrix} 56 & 43 & 21 & 22 & 34 \\ 41 & 53 & 28 & 39 & 47 \\ 25 & 38 & 75 & 23 & 43 \\ 54 & 13 & 35 & 65 & 15 \\ 45 & 39 & 73 & 15 & 72 \end{pmatrix}$; м) $\begin{pmatrix} 36 & 21 & 66 & 78 & 63 \\ 61 & 59 & 28 & 39 & 15 \\ 75 & 28 & 76 & 23 & 13 \\ 84 & 13 & 32 & 45 & 15 \\ 55 & 38 & 73 & 15 & 24 \end{pmatrix}$.

2. Вычислить обратную матрицу для следующих матриц:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 & 1 \\ 3 & -4 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & -4 & 3 \\ -1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & -1 \\ -8 & 2 & 6 & -4 \\ -27 & 2 & 9 & -9 \\ -64 & 2 & 12 & -16 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} -7 & 3 & -1 & 5 \\ -1 & 5 & -3 & 7 \\ -3 & 7 & -5 & 1 \\ -5 & 1 & -7 & 3 \end{pmatrix}$;

д) $\begin{pmatrix} 41 & 41 & 41 & 61 \\ 41 & 2 & 4 & 8 \\ 41 & 3 & 9 & 27 \\ 41 & 4 & 16 & 64 \end{pmatrix}$; е) $\begin{pmatrix} -10 & -10 & -10 & -10 \\ -10 & 20 & 40 & 80 \\ -10 & 30 & 90 & 270 \\ -10 & 40 & 160 & 640 \end{pmatrix}$;

ж) $\begin{pmatrix} 9 & 9 & 9 & 9 \\ 9 & 2 & 4 & 8 \\ 9 & 3 & 9 & 27 \\ 9 & 4 & 16 & 64 \end{pmatrix}$; з) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 8 & 12 & 16 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 3 & 12 & 48 & 192 \end{pmatrix}$.

3. Определить ранг матриц:

а) $\begin{pmatrix} 53 & 51 & 12 & 34 & 37 \\ 33 & 11 & 32 & 14 & 31 \\ 66 & 22 & 64 & 28 & 62 \\ 21 & 41 & 15 & 16 & 25 \\ 22 & 14 & 13 & 51 & 34 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 7 & 8 & 6 \\ 12 & 4 & 14 & 16 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & -3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 6 & 1 \\ 5 & 5 & 11 & 10 & 8 & 12 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 3 & 3 & 4 & 2 & 3 & 6 \\ 4 & 2 & 3 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 9 & 5 & 1 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$;

д) $\begin{pmatrix} 13 & 22 & 13 & 23 & -1 & 19 \\ 35 & 45 & 51 & 19 & -1 & 27 \\ 71 & 11 & 24 & 49 & -2 & 29 \\ 51 & 11 & 21 & 39 & -5 & 29 \end{pmatrix}$; е) $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 13 & 23 & -1 & 9 \\ 9 & 45 & 51 & 19 & -1 & 7 \\ 3 & 15 & 24 & 49 & -2 & 9 \\ 7 & 35 & 21 & 39 & -5 & 9 \end{pmatrix}$;

ж) $\begin{pmatrix} 13 & 41 & 32 & 34 & 37 \\ 31 & 71 & 35 & 14 & 31 \\ 62 & 72 & 64 & 28 & 62 \\ 43 & 89 & 15 & 16 & 25 \\ 32 & 81 & 17 & 51 & 34 \end{pmatrix}$; з) $\begin{pmatrix} 55 & 51 & 65 & 4 & 3 \\ 33 & 11 & 82 & 4 & 3 \\ 66 & 22 & 64 & 28 & 62 \\ 21 & 45 & 15 & 16 & 25 \\ 22 & 40 & 10 & 24 & 34 \end{pmatrix}$;

и) $\begin{pmatrix} 7 & 22 & 13 & 23 & -15 & 1 \\ 21 & 66 & 51 & 19 & -17 & 7 \\ 7 & 8 & 14 & 13 & -28 & 2 \\ 21 & 24 & 42 & 39 & -84 & 6 \end{pmatrix}$; к) $\begin{pmatrix} 97 & 82 & 4 & 23 & -41 & 1 \\ 95 & 48 & 4 & 19 & -82 & 2 \\ 91 & 81 & 4 & 49 & -21 & 6 \\ 59 & 18 & 4 & 39 & -51 & 8 \end{pmatrix}$;

л) $\begin{pmatrix} 3 & 22 & 13 & 23 & -1 & 19 \\ 5 & 45 & 51 & 19 & -1 & 27 \\ 7 & 11 & 24 & 49 & -2 & 29 \\ 5 & 11 & 21 & 39 & -5 & 29 \end{pmatrix}$; м) $\begin{pmatrix} 13 & 2 & 13 & -23 & 1 & 17 \\ 35 & 4 & -51 & -19 & 1 & 18 \\ 71 & 1 & 24 & -49 & 2 & 11 \\ 51 & 1 & 21 & -39 & 5 & 15 \end{pmatrix}$.

4. Решить системы линейных алгебраических уравнений:

а) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 3; \\ 2x_1 + 5x_2 - 10x_3 - 3x_4 = 0; \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 6; \\ 4x_1 + 4x_2 + x_3 - 5x_4 = 11. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 1; \\ x_1 + x_2 - 3x_3 + 6x_4 = 3; \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 8; \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 2. \end{cases}$

в) $\begin{cases} 5x_1 - 7x_2 + 4x_3 - x_4 = 9; \\ 3x_1 + 2x_2 + 6x_3 - 8x_4 = 14; \\ 4x_1 - 9x_2 - 5x_3 - 3x_4 = -10; \\ x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 = 7. \end{cases}$ г) $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 3x_4 = 14; \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - x_4 = -5; \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7; \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 16. \end{cases}$

д) $\begin{cases} x_1 - 10x_2 + 4x_3 - 11x_4 = -42; \\ x_1 + 6x_2 + 18x_3 - 24x_4 = 284; \\ x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 106; \\ 0.5x_1 + x_2 - 7x_3 - 140x_4 = -80. \end{cases}$ е) $\begin{cases} 3x_1 - 7x_2 + 4x_3 - x_4 = -78; \\ x_1 + 2x_2 + 6x_3 - x_4 = -8; \\ x_1 - 9x_2 - 5x_3 - x_4 = -173; \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = -18. \end{cases}$

ж) $\begin{cases} 0.5x_1 - x_2 + 6x_3 + x_4 = 161; \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 = 260; \\ -x_1 + 9x_2 - 5x_3 - x_4 = -99; \\ x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = 33. \end{cases}$ з) $\begin{cases} 5x_1 - x_2 + 4x_3 - x_4 = -37; \\ 3x_1 + x_2 + 6x_3 - 8x_4 = 117; \\ 4x_1 - x_2 - 5x_3 - 3x_4 = -73; \\ x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = -91. \end{cases}$

2.6. Выводы

1. В *Mathcad* при помощи специальных операторов вычисляются величины, характеризующие матрицу: определитель матрицы и ранг матрицы.

2. В *Mathcad* простым присвоением оператору A^{-1} вычисляется обратная матрица.

3. В *Mathcad* автоматизировано решение систем линейных алгебраических уравнений любого порядка с невырожденной матрицей коэффициентов.

4. Вычисления с матрицами чисел выполняются с использованием матричных операторов.

3. МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

3.1. Решение нелинейных уравнений

В *Mathcad* легко с заданной погрешностью решить практически любое нелинейное уравнение. Для простейших уравнений вида $F(x) = 0$ (причем $F(x)$ – функция любого вида) решение находится с помощью функции из *Mathcad* $root(F(x, y, ...), x, [a, b])$. В качестве аргумента функции $root(F)$ записывается функция $F(x, y, ...)$ – левая часть уравнения $F(x, y, ...) = 0$, числа a и b – соответственно нижняя и верхняя границы интервала, в пределах которого нужно найти корень уравнения. Функция root возвращает значение корня уравнения с точностью, заданной системной переменной *TOL*.

Границы интервала, в пределах которого должен находиться корень, указывать необязательно. Можно предварительно задать начальное значение переменной, относительно которой решается уравнение.

Функция *root* отыскивает как действительные, так и комплексные корни.

Для поиска корней обычного полинома в *Mathcad* существует функция *polyroots*(*v*), возвращающая вектор, содержащий все корни полинома, коэффициенты которого содержатся в *v*.

Например: нужно решить уравнение $4x^3 - x^2 + x - 5 = 0$.

Решение в *Mathcad* для этого уравнения состоит из двух операций – задания вектора коэффициентов уравнения и вывода результата его решения:

$$\mathrm{v} := \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{polyroots(v)} = \begin{pmatrix} -0.417 - 0.99\mathrm{i} \\ -0.417 + 0.99\mathrm{i} \\ 1.084 \end{pmatrix}.$$

Как и при других операциях в *Mathcad*, все промежуточные вычисления, приводящие к полученному результату, скрыты от пользователя.

3.2. Итерационные вычисления

Mathcad позволяет реализовать вычисления, производимые по рекуррентным соотношениям. Это такие соотношения, при которых значение некоторой функции находится по одному или нескольким предшествующим её значениям. Классическим примером рекуррентных вычислений является расчёт чисел Фибоначчи, приведённых в 1228 году в рукописи Леонарда Пизанского (Фибоначчи). Это числа из последовательности, в которой каждое число, начиная с третьего, получается как сумма двух предыдущих чисел, а первые два числа равны единице.

Вычисление первых десяти чисел Фибоначчи в *Mathcad* выглядит следующим образом:

$$x_0 := 1 \; x_1 := 1 \quad i := 2..9 \; x_i := x_{i-2} + x_{i-1}$$

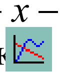
$x^T =$

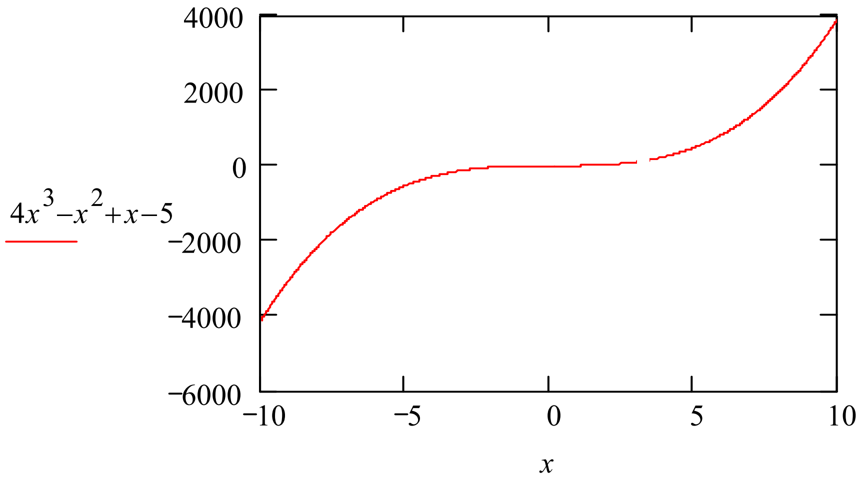
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55

Mathcad поддерживает также некоторые распространённые операторы языков программирования, используемые для вычислений, повторяющихся циклически, например *For* или *While*. Их также можно использовать для итерационных вычислений.

3.3. Построение графика функции

Чаще всего при расчётах в качестве иллюстрации или материала для анализа требуются двумерные графики функций. В соответствии с этим построение таких графиков в *Mathcad* максимально упрощено.

Для построения графика функции одной переменной сначала требуется набрать функцию, например, $4x^3 - x^2 + x - 5$. После этого нужно в палитре графиков выбрать двумерный график  . На экране появится шаблон графика с уже введённой по оси *Y* функцией. В место ввода шаблона по оси *X* нужно ввести имя переменной, например, *x*. После этого нужно щёлкнуть мышью вне шаблона, и график построится:



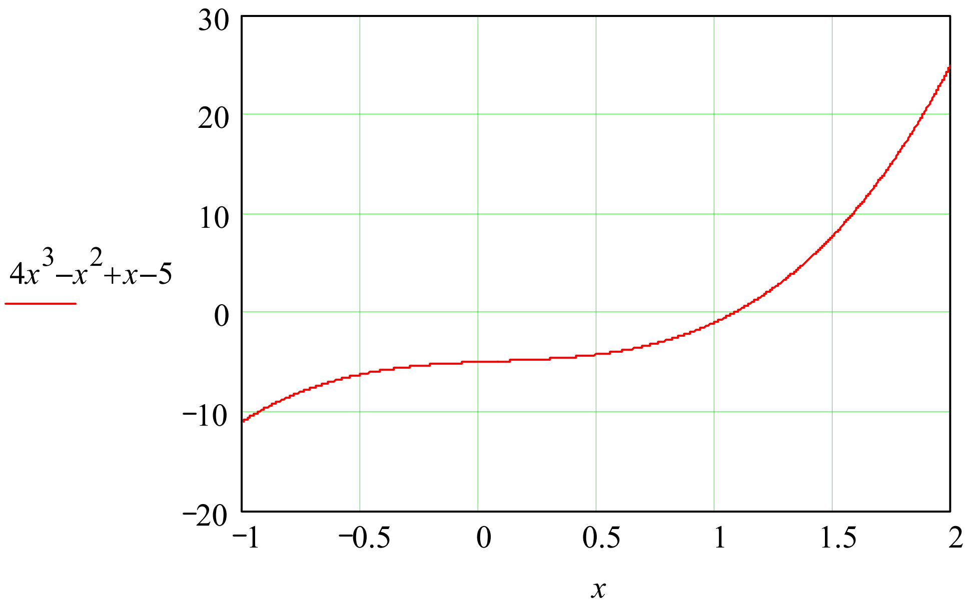
С помощью мыши очень легко изменить размеры и переместить график.

Для построения на том же графике ещё нескольких графиков после первой функции через запятую нужно ввести необходимые функции.

Непосредственно на графике можно изменить границы построения графика, добавить сетку, изменить цвет графика и т. д.

Границы построения указываются в местах ввода, появляющихся непосредственно слева и справа от имени переменной.

Добавление сетки, изменение цвета производится путём выбора пункта Format из контекстного меню графика.



3.4. Дифференцирование

Операцию нахождения производной функции называют *дифференцированием*.

Дифференциалом dy функции $y = f(x)$ в точке x_0 называют главную линейную часть приращения функции (относительно Δx) в этой точке.

Для вычисления дифференциала dy функции $y = f(x)$ в точке x_0 следует воспользоваться следующей формулой:

$$dy = f'(x_0) \cdot dx .$$

Дифференциалом dx независимой переменной x называют приращение этой переменной Δx, то есть $dx = \Delta x$.

Производная n-го порядка функции $f(x)$ – производная от производной $(n - 1)$-го порядка (вторая производная – производная от первой производной этой функции; третья производная – производная от второй и т. д.)

Mathcad позволяет дифференцировать не только численно, но и символьно. Символьными называют такие вычисления, результаты которых представляются в аналитическом виде, то есть в виде формул. В частном случае результат может быть и числом. Вычисления в символьном виде отличаются большей общностью и позволяют судить о математических, физических и иных закономерностях решаемых задач.

Ядро символьного процессора системы *Mathcad* – несколько упрощённый вариант ядра известной системы символьной математики *Maple V*.

Команды, относящиеся к работе символьного процессора, содержатся в меню *Symbolics*. Чтобы символьные операции выполнялись, процессору необходимо указать, над каким выражением это должно проводиться, то есть надо выделить выражение.

При дифференцировании выделяется не выражение, а переменная, по которой дифференцируется выражение. Дифференцирование производится командой меню *Variable* ►*Differentiate*. Для вычисления производных высшего порядка нужно повторить вычисление необходимое число раз.

Например. Исходное выражение: $\dfrac{3x+1}{x^4+1}$.

Производная: $\dfrac{3}{(x^4+1)} - 4 \cdot \dfrac{(3x+1)}{(x^4+1)^2} \cdot x^3$.

Исходное выражение: $2^{\sin(x)} \cdot \ln(\cos(x))$

Производная: $2^{\sin(x)} \cdot \cos(x) \cdot \ln(2)\ln(\cos(x)) - 2^{\sin(x)} \cdot \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

3.5. Разложение в ряд Тейлора

При использовании сложного вида функции в ряде прикладных задач их заменяют рядами Тейлора. *Ряд Тейлора* – это представление функции *f(x)* в окрестности точки $x_0 \in X$ с помощью её производных различного порядка в виде ряда по степеням двучлена $(x - x_0)$:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots +$$
$$+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^{n+1})$$

При $x_0 = 0$ ряд будет по степеням переменной x. Такой степенной ряд является частным случаем разложения функции в ряд Тейлора и называется *рядом Маклорена*.

Разложение в ряд Тейлора осуществляется командой

Variable ►*Expand to Series*.

По умолчанию число членов ряда равно шести. В разложении указывается остаточная погрешность.

Например:

$$e^{(\cos(x))^{x\cdot\ln(x)}} = \exp(1) + \frac{-1}{2}\cdot\exp(1)\cdot\ln(x)\cdot x^3 + \frac{-1}{12}\cdot\exp(1)\cdot\ln(x)\cdot x^5 + o(x^6)$$

3.6. Интегрирование

Множество вопросов математического анализа и приложений в разнообразных отраслях науки приводит к задаче: по данной функции *f(x)* найти такую функцию *F(x)*, производная которой равна функции *f(x)*.

Функция *F(x)* называется *первообразной* для функции *f(x)* на промежутке *X*, если для любого $x \in X$ функция *F(x)* дифференцируема и выполняется равенство $F'(x) = f(x)$.

Операция нахождения первообразной по её производной или неопределённого интеграла по заданной подынтегральной функции называется *интегрированием* этой функции. Интегрирование является операцией, обратной дифференцированию. Для проверки правильности выполнения интегрирования нужно продифференцировать результат и получить при этом подынтегральную функцию.

Интегрирование осуществляется командой меню

Variable ►*Integrate*.

Эта команда используется так же, как и команда дифференцирования. Например:

Исходное выражение

$$\frac{1}{(\sin(x))^5}$$

Интеграл

$$\frac{-1}{4\cdot\sin(x)^4}\cdot\cos(x) - \frac{3}{8\cdot\sin(x)^2}\cdot\cos(x) + \frac{3}{8}\cdot\ln(\csc(x) - \cot(x))$$

Исходное выражение

$$\frac{1}{\ln(x)}$$

Интеграл

$$-\mathrm{Ei}(1, -\ln(x))$$

3.7. Разложение на правильные дроби

Разложение сложного алгебраического выражения на правильные дроби позволяет проанализировать поведение исследуемой величины в зависимости от каждой из составляющих. При этом возможно нагляднее представить влияние особенных точек на поведение исследуемой величины, выявить существенные и несущественные составляющие. Эта операция позволяет упростить интегрирование рациональных выражений.

Команда *Variable* ►*Convert to Partial Fraction* возвращает символьное разложение выражения, представленное относительно заданной переменной в виде суммы правильных дробей.

Например:

$$\frac{2\cdot x^2 - 9x - 6 + x^3}{(x-1)\cdot(x+3)\cdot(x+2)} = 1 - \frac{1}{(x-1)} + \frac{3}{(x+3)} - \frac{4}{(x+2)}$$

и

$$\frac{4x^5 + x^2 - 8\cdot x^4 + 24 + 6x^3}{(x+13)\cdot(x-5)\cdot(x+11)(x-9)}$$

$$= \quad 4\cdot x - 48 + \frac{1726649}{792\cdot(x+13)} - \frac{8299}{1152\cdot(x-5)} - \frac{769173}{640\cdot(x+11)} + \frac{188187}{1760(x-9)}.$$

3.8. Матричные операции

Наряду с рассмотренными ранее матричными операциями над численными матрицами в *Mathcad* имеется более общий аппарат для работы с матрицами при их задании в символьном виде.

Символьный процессор системы *Mathcad* обеспечивает проведение в символьном виде, то есть в виде формул, трёх наиболее распространённых матричных операций: транспонирование (замену строк матрицы ее столбцами и наоборот), создание обратных матриц, а также вычисление определителя. Эти действия осуществляются соответственно командами *Transpose*, *Invert*, *Determinant* из подменю *Matrix* меню *Symbolics*.

Например.

Транспонирование:

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Обращение:

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{(a\cdot d - c\cdot b)}\cdot\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

Нахождение определителя:

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \Delta = a\cdot d - c\cdot b.$$

3.9. Определённый интеграл

Вычисление определённых интегралов может производиться, как и операции с матрицами, и численно, и в аналитическом (символьном) виде. При символьном вычислении необходимо воспользоваться той же командой меню, что и для вычисления неопределённого интеграла:

Variable ►*Integrate*.

При численном интегрировании, как обычно, достаточно поставить знак равенства.

Например:

$$\int_1^3 a x^2 + x\,dx = \left(\frac{26}{3}\cdot a + 4\right)\cdot x$$ Символьное интегрирование

$$\int_1^3 x\cdot \ln(x)^{\sin(x)}\,dx = 2.978$$ Численное интегрирование

3.10. Упражнения

1. Решить нелинейные уравнения:

а) $e^x \cdot \sin x + \cos^2 x = 3$; б) $x^4 - 5x^3 + 3x^2 - 4x + 7 = 0$;

в) $\sin^2 x \cdot \ln x - x = 1$; г) $\dfrac{1}{x^2 - 1} + \sin x \cos 2x = 0$;

д) $6\cos^2 x \cdot \ln(3x - 5) + 6x = 8$; е) $\dfrac{\ln x - 4}{x^2 - 1} + x^{-3}(2x + 1)^4 = 0$;

ж) $\dfrac{\cos^4 x}{\sin x^2 - 1} + \sin x \cos 2x = 0$; з) $4e^{5x} \cdot (x - 9)^3 + (x + 3)^7 = 3$;

и) $x^{21} - 3x^{13} + 12x^5 - 8x + 15 = 0$; к) $e^{7x^2 - 3x + 4} \cdot x + x^2 - 4x - 11 = 3$;

л) $\dfrac{\ln(3x + 5) - 4}{x^3 - 1} + \ln(2x + 1)^4 = 0$; м) $\dfrac{(x - 4)^4}{x^2 - 1} + x^{-3} \ln(8x - 3) = 0$.

2. Выполнить итерационные вычисления:

а) $x_0 = 1$; $x_1 = 2$; $x_i = 3x_{i-1} + x_{i-2}$, $i = 2,..., 10$;

б) $x_0 = 0, 5$; $x_1 = 1$; $x_i = x_{i-1} - 2x_{i-2}$, $i = 2,..., 10$;

в) $x_0 = \pi/3$; $x_1 = \pi/2$; $x_i = \sin(x_{i-1}) + \cos(x_{i-2})$, $i = 2,..., 10$;

г) $x_0 = 8$; $x_1 = 10, 5$; $x_i = x_{i-1} + x_{i-2}$, $i = 2,..., 10$;

д) $x_0 = 5$; $x_1 = 1$; $x_i = \text{tg}\, x_{i-1} - 2\,\text{tg}\, x_{i-2}$, $i = 2,..., 10$;
е) $x_0 = 1$; $x_1 = 0, 5$; $x_i = x_{i-1} / x_{i-2}$, $i = 2,..., 10$;
ж) $x_0 = 0$; $x_1 = 1$; $x_i = e^{x_{i-1}} + e^{x_{i-2}}$, $i = 2,..., 10$;
з) $x_0 = 1$; $x_1 = 3$; $x_i = \ln x_{i-1} + \ln x_{i-2}$, $i = 2,..., 10$;
и) $x_0 = 1$; $x_1 = 1, 5$; $x_i = \dfrac{x_{i-1} + 2}{x_{i-2} + 3}$, $i = 2,..., 10$;
к) $x_0 = 1$; $x_1 = 0, 5$; $x_i = \sqrt{x_{i-1} + 3x_{i-2}}$, $i = 2,..., 10$;
л) $x_0 = 1$; $x_1 = 0, 5$; $x_i = (2x_{i-1} + 4x_{i-2}) \cdot \sqrt{x_{i-1} + 3x_{i-2}}$, $i = 2,..., 10$;
м) $x_0 = 1$; $x_1 = 0, 5$; $x_i = \dfrac{2x_{i-1} + 1}{3x_{i-2} + 4}$, $i = 2,..., 10$;
н) $x_0 = 0, 5$; $x_1 = 0, 3$; $x_i = \dfrac{5x_{i-1} + 3}{6x_{i-2} + 7}$, $i = 2,..., 10$.

3. Построить графики функций:

а) $y = \dfrac{x \ln x}{(x+2)^2}$; б) $y = \dfrac{e^x}{(x+1)(x-2)}$;

в) $y = \dfrac{\sin x}{x}$; г) $y = \dfrac{4}{(x+2)(x+3)}$;

д) $y = \dfrac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3}$; е) $y = \text{arctg}\left(\dfrac{1}{x^2+1}\right)$;

ж) $y = x \sin \dfrac{3\pi}{4x}$; з) $y = \dfrac{\sqrt{x^2 - 2x + 6} - \sqrt[3]{x^3 + 2x - 6}}{x^2 - 4x + 3}$;

и) $y = \left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^{x+2}$; к) $y = \left(1 + \dfrac{2}{x+3}\right)^{x-2}$;

л) $y = 5\sin^2 2x \cos 3x - 1$; м) $y = 3\sin 6x \cos 5x - 4\sin 3x$;

н) $y = \dfrac{\sin 2x - \cos x}{1 - \text{tg} x}$; о) $y = \dfrac{1 - 3\cos 4x}{\pi - 4x}$.

4. Продифференцировать функции:

а) $y = \dfrac{2x+3}{x^2 - 5x + 5}$; б) $y = x \dfrac{\text{tg} x - \text{ctg} x}{\sin^2 x}$; в) $y = \dfrac{5}{\sqrt[3]{x^2}} - \dfrac{8}{x\sqrt[3]{x}}$;

г) $y = x^n (\sin 12x + \cos^5 31x)$; д) $y = e^{\sin x} + \log_6 \cos x^2$;

е) $y = \sin x (\ln(x + \cos 2x) + 8x)^2$; ж) $y = \cos^3 x \sin(3x^4 - 2x^2 - 9)$;

з) $y = \ln x^{\cos 2x} - \ln(x^2 e^{3x} - x)$; и) $y = a^x (x^3 \cos 4x - x^{-3} \sin 7x)$;

к) $y = \log_3 (\cos^5 8x - \sin^3 6x \cos^2 4x + x^x)$; л) $y = x^{\sin 5x} (\ln \cos 5x)$;

м) $y = x^x \cdot \dfrac{\sqrt{23x + 4x^3}}{\sin x + \cos}$; н) $y = \dfrac{x^{\cos 2x} - e^{\sin x}}{(x+1)^2 (x-3)^2 (x+5)^3}$;

о) $y = e^x \cdot (14\sin^5 x + 9x^2\cos^4 2x - 3x\sin 5x)$; п) $y = \cos^3 x \cdot 2^{x-4}$;
р) $y = \sin^2 x \cdot \cos 2x + \cos^5 x \cdot \sin 7x$; с) $y = x^{\cos 7x}(\ln\sin 8x)$;
т) $y = \dfrac{21x^4 + 3x^2 - 6x + 5}{9x^5 - 73x^2 - 15x + 35}$; у) $y = \cos^2 x(\ln(x + \cos 2x) + 3x)^2$;
ф) $y = x^5(\ln(3x + \cos 5x) + e^{2x})^2$; х) $y = \sin\left(1 - \dfrac{3x-1}{5x+3}\right) \cdot \dfrac{2x+3}{x^2+5}$;
ц) $y = \dfrac{\sin(2x+3)\cos(e^{3x} - 6)}{45x^2 - 23x + 78}$; ч) $y = \log_3(\ln(8x + \cos 5x) - 17x^3)$.

5. Разложить функции в ряд Тейлора:

а) $y = \sin^2 x$; б) $y = \sin 4x\cos x$; в) $y = e^{2x} - \sin x$;
г) $y = x^2\ln(1+x)$; д) $y = x^3\sin^2 x$; е) $y = x \cdot e^{2x} - \ln(2+x)$;
ж) $y = x^2 \cdot \sin x$; з) $y = (\mathrm{arctg}\, 2x)^x$; и) $y = \dfrac{x^8}{8(1-x^2)}$;
к) $y = 2x\sin x - (x^2 - 2)\cos x$; л) $y = \dfrac{2}{2x-1} - \dfrac{4}{x^2 - 0.25}$;
м) $y = \dfrac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$; н) $y = \dfrac{2x^3 - 3x - 4}{x^5 + 5}$.

6. Проинтегрировать функции:

а) $y = x^n$; б) $y = \sin x$; в) $y = e^x$; г) $y = \dfrac{1}{x}$;
д) $y = x \cdot \ln x$; е) $y = 2\sin x + 6 - 3x^2$; ж) $y = x(x-1)^{12}$;
з) $y = \sqrt[3]{1 - x^2}$; и) $y = \dfrac{x^3}{x^8 + 1}$; к) $y = \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$; л) $y = \dfrac{x^2 e^{\sin x}}{24}$.

7. Разложить на правильные дроби:

а) $y = \dfrac{x^3 - 3x + 1}{(x+1)^2(x^2+1)(x-4)(x+5)}$;

б) $y = \dfrac{x^3 - 4x + 5}{(x^2 + 3x + 5)(x-1)^3(x+2)}$;

в) $y = \dfrac{x^3 - 4x^2 + 8}{(x-2)^2(x+5)(x+1)}$;

г) $y = \dfrac{x^2 + 3x + 7}{(x-1)^3(x+3)(x-9)}$;

д) $y = \dfrac{5x^4 - 7x^4 + 3x^3 - 4x^2 + 36}{(x-7)^2(x+1)(x-13)^3}$;

е) $y = \dfrac{19x^3 - 12x^2 + 55x - 87}{(x-4)(x-6)(x+9)^3}$;

ж) $y=\dfrac{25x^3-48x^2+2x-50}{(x-4)^3(x-7)(x+11)}$;

з) $y=\dfrac{67x^5-34x^4+18x^3-54x^2-77x+92}{(x-12)^2(x+15)^3(x+13)}$;

и) $y=\dfrac{111x^3-234x^2+182x-932}{(x-21)^2(x+23)(x+21)}$;

к) $y=\dfrac{45x^4-56x^2+188}{(x-48)(x+54)^2(x+17)(x-18)}$

л) $y=\dfrac{312x^3-512x^2+534x-812}{(x-11)^2(x+41)(x+17)}$

м) $y=\dfrac{315x^3-255x^2+165x-124}{(x-25)^2(x+13)(x+19)}$.

8. Выполнить транспонирование и обращение следующих матриц:

а) $\begin{pmatrix} a^2 & a^3 \\ ab & ab^2 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & cd \\ a & a-cd \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ b & a^2b & ab \\ b^2 & ab^2 & a^2b \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{pmatrix}$;

д) $\begin{pmatrix} c & a+3c & a^2+c \\ b+c & ab+3bc & a^2b+c \\ b^2+c & ab^2+3c^2 & a^2b^2+c \end{pmatrix}$; е) $\begin{pmatrix} d-1 & 1 & d^2+2 \\ dc-2 & c & d^2c+1 \\ dc^2-1 & c^2 & d^2c^2+3 \end{pmatrix}$;

ж) $\begin{pmatrix} 1 & a+c & a^2-c^2 \\ c & ac+a & a^2c-4 \\ c^2 & ac^2+1 & a^2c^2-9 \end{pmatrix}$; з) $\begin{pmatrix} 10 & a & a^2 \\ 5b & ab & a^2b \\ 25b^2 & ab^2 & a^2b^2 \end{pmatrix}$.

9. Вычислить определённые интегралы:

а) $\int_1^2 x^3dx$; б) $\int_0^{\pi}\sin\dfrac{x}{4}dx$; в) $\int_{\ln 2}^{\ln 3} e^x dx$; г) $\int_4^9 x^2\sin^3\pi x dx$;

д) $\int_1^2 e^{x^2}dx$; е) $\int_1^6 x^4\ln(x+1)dx$; ж) $\int_0^8 (x+4)^5(x-3)^4dx$;

з) $\int_1^3 \cos^3(\pi x/8)dx$; и) $\int_{\pi/16}^{\pi/14}\cos^8 xdx$; к) $\int_1^{24}\dfrac{(x+3)^4-\sqrt{x}}{(x-0{,}5)^5}dx$;

л) $\int_{31}^{52}(x^3+x^7)e^{-2x}dx$; м) $\int_{15}^{28}2^{x=1}(x+4)^5dx$; н) $\int_{10}^{45}(x^{-3}+3^{-x})\sin\dfrac{\pi x}{17}dx$.

3.11. Выводы

1. В *Mathcad* могут быть найдены решения любых нелинейных уравнений. При этом не нужно задавать интервал, где лежат эти решения.

2. *Mathcad* выполняет итерационные вычисления.

3. В *Mathcad* автоматизировано построение графиков функций одной переменной любого вида.

4. В *Mathcad* можно продифференцировать функцию как в численном виде, так и в символьном.

5. *Mathcad* отыскивает ряды Тейлора функций.

6. *Mathcad* позволяет проводить аналитическое (символьное), а также численное интегрирование функций.

7. *Mathcad* осуществляет основные матричные операции в символьном виде.

8. *Mathcad* находит разложение на правильные дроби.

9. *Mathcad* позволяет численно и символьно вычислять определённые интегралы.

4. РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

4.1. Решение ОДУ

Обыкновенным дифференциальным уравнением n-го порядка называется уравнение вида

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0,$$

где x – независимая переменная;

y – искомая функция переменной x: $y = y(x)$;

$y', y'', ..., y^{(n)}$ – производные искомой функции от первого до n-го порядка соответственно.

Решением уравнения называется функция $y = f(x)$, определенная на некотором интервале (a, b), которая обращает это дифференциальное уравнение в тождество.

При заданных начальных условиях для функции и ее производных (в некоторой точке области существования уравнения) задачу отыскания решения уравнения называют *задачей Коши.*

Общим решением дифференциального уравнения в его области определения называется функция $y = f(x, C_1, C_2, ..., C_n)$, если она является решением этого уравнения при любых постоянных величинах $C_1, C_2, ..., C_n$. При заданных начальных условиях эти постоянные величины могут быть определены единственным образом.

Частным решением дифференциального уравнения называется функция, найденная из общего решения подстановкой в нее фиксированных значений (конкретных чисел) постоянных $C_1, C_2, ..., C_n$:

$$y_{\textbf{частное}} = f(x, C_1^0, C_2^0, ..., C_n^0).$$

Обыкновенные дифференциальные уравнения в *Mathcad* можно решать с помощью ряда встроенных функций. Каждая из этих функций предназначена для численного решения ОДУ. В результате решения получается матрица, содержащая значения функции, вычисленные на некотором множестве точек – на некоторой сетке значений. Для каждого алгоритма, который используется при решении дифференциальных уравнений, *Mathcad* имеет различные встроенные функции. Несмотря на различные методы поиска решения, каждая из этих функций требует, чтобы были заданы, по крайней мере, следующие величины, необходимые для поиска решения:

1) начальные или граничные условия;

2) набор точек, в которых нужно найти решение;

3) само дифференциальное уравнение, записанное в некотором специальном виде.

Как и в других задачах, при решении дифференциальных уравнений промежуточные выкладки опускаются и пользователь получает, используя операторы *Mathcad*, готовые решения. Форма вывода решения может быть как табличной, так и графической.

Нелинейные ДУ и системы с такими уравнениями, как правило, не имеют аналитических методов решения, и здесь особенно важна возможность их решения численными методами.

Уравнения решаются с использованием так называемого "*блока решения*", состоящего из последовательности выражений, которые включают в себя слово *Given*, набор условий и вызов внешней функции для решения уравнения.

Функция odesolve(x, *b*, [*step*]) возвращает функцию с аргументом *x*, которая является решением ОДУ, зависящую от начальных или граничных условий, заключающихся в "блоке решения". Представление ОДУ должно быть линейным относительно высшей производной, и число начальных условий должно соответствовать порядку ОДУ.

Аргументы функции *odesolve*:

x – переменная интегрирования;

b – конечная точка интервала интегрирования;

step (не обязателен) – количество шагов при решении уравнения.

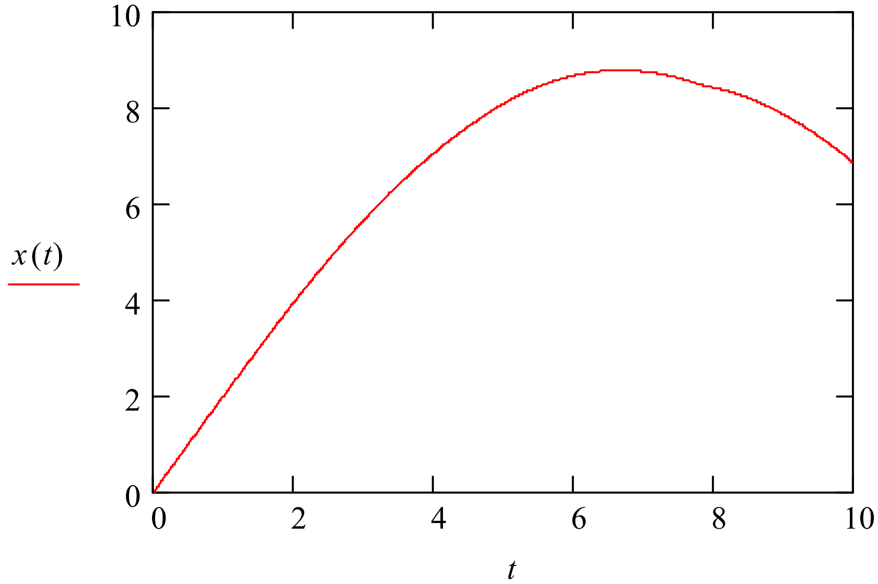
Пример решения ОДУ второго порядка с использованием функции *odesolve*:

Given

$$53\,x''(t) + 0\,x'(t) + 3\,x(t) = e^{-t} + tan(t)$$

$x(0) = 0 \qquad x(1) = 2$

$x := Odesolve(t, 150)$



Символ " ' ", обозначающий производную, ставится с использованием комбинации клавиш $Ctrl + F\,7$.

Другой функцией, позволяющей решать ОДУ, является функция *rkfixed*. Для решения с помощью этой функции ОДУ, если оно содержит производные второго порядка и выше, должно быть представлено в виде системы ОДУ первого порядка.

Системы из ОДУ для их решения в среде *Mathcad* с помощью функции *rkfixed* должны быть представлены в форме Коши:

$$\begin{cases} y_1(x_0) = y_{0,1}; \\ y_2(x_0) = y_{0,2}; \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ y_n(x_0) = y_{0,n}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n); \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, ..., y_n); \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ y_n' = f_n(x, y_1, y_2, ..., y_n). \end{cases}$$

Обыкновенные дифференциальные уравнения n-го порядка $y^{(n)} = f(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)})$ с заданными начальными условиями $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_{0,1}$, $y''(x_0) = y_{0,2}$, ..., $y^{(n-1)}(x_0) = y_{0,n-1}$ приводятся к системе ОДУ в форме Коши с помощью замены:

$y_1(x) = y(x)$, $y_2(x) = y'(x)$, ..., $y_n(x) = y^{(n-1)}(x)$, $y_{0,0} = y(x_0)$, $y_{0,1} = y'(x_0)$, ..., $y_{0,n-1} = y^{(n-1)}(x_0)$.

В итоге получаем начальные условия

$$\begin{cases} y_1(x_0) = y_{0,0}; \\ y_2(x_0) = y_{0,1}; \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ y_n(x_0) = y_{0,n-1}; \end{cases}$$

и систему ОДУ

$$\begin{cases} y_1' = y_2; \\ . \quad . \quad . \quad . \\ y_{n-1}' = y_n; \\ y_n' = f(x, y_1, y_2, ..., y_n). \end{cases}$$

Функция *rkfixed*(y, $x1$, $x2$, *npoints*, D) возвращает матрицу, первый столбец которой содержит точки, в которых вычислялось решение; второй столбец содержит соответствующие решения и их первые $n - 1$ производные.

Аргументы функции *rkfixed*:

> y должен быть вектором с n начальными значениями, где n – порядок дифференциального уравнения или число уравнений в системе (если решается система уравнений);
>
> $x1$, $x2$ – начальная и конечная (граничные) точки интервала, на котором ищется решение (начальные значения в векторе y даны для точки $x1$);
>
> *npoints* – число точек, не считая начальной точки, в которых решение должно аппроксимироваться; от значения *npoints* зависит количество строк матрицы, возвращаемой функцией;
>
> D – n-элементная векторная функция, содержащая первые производные неизвестных функций.

Пример решения дифференциального уравнения с использованием функции *rkfixed*:

Сначала нужно переобозначить дифференциальное уравнение как систему двух уравнений первого порядка

Пусть $x''(t) - x'(t) + x(t) = \sinh(t)$,

тогда пусть $x0(t) = x(t)$ $x1(t) = x0'(t)$,

теперь можно записать систему:

$$x0'(t) = x1(t)$$

$$x1'(t) = x1(t) - x0(0) + \sinh(t)$$

$$\begin{pmatrix} x0(0) \\ x1(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

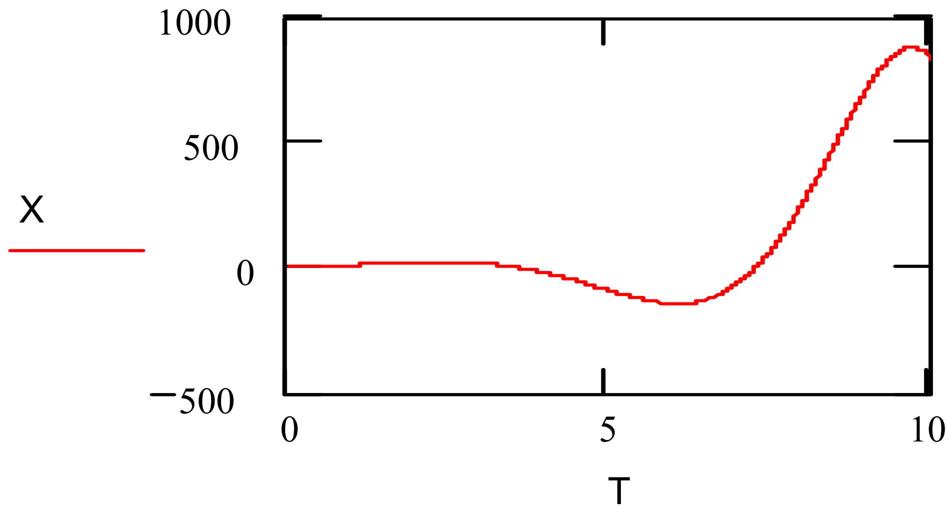
$$ic := \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$D(t, X) := \begin{pmatrix} X_1 \\ X_1 - X_0 + \sin(t) \end{pmatrix}$$

$$S := \text{rkfixed}(ic, 0, 10, 1500, D)$$

$T := S^{\langle 0 \rangle}$ значения независимой переменной

$X := S^{\langle 1 \rangle}$ значения искомой функции



Вместо *rkfixed* после представления уравнения в виде системы можно использовать и другие функции, которые будут описаны далее.

4.2. Решение систем ОДУ

Функцию *rkfixed* можно использовать для любых систем ОДУ.

Для того чтобы решить систему ОДУ, необходимо:

1) определить вектор, содержащий начальные условия для каждой неизвестной функции;

2) определить функцию, возвращающую значение в виде вектора из *n* элементов, которые содержат первые производные каждой из неизвестных функций;

3) выбрать точки, в которых нужно найти приближённое решение;

4) передать всю эту информацию в функцию *rkfixed*.

Функция *rkfixed* вернёт матрицу, чей первый столбец содержит точки, в которых ищется приближённое решение, а остальные столбцы содержат значения найденного приближённого решения в соответствующих точках.

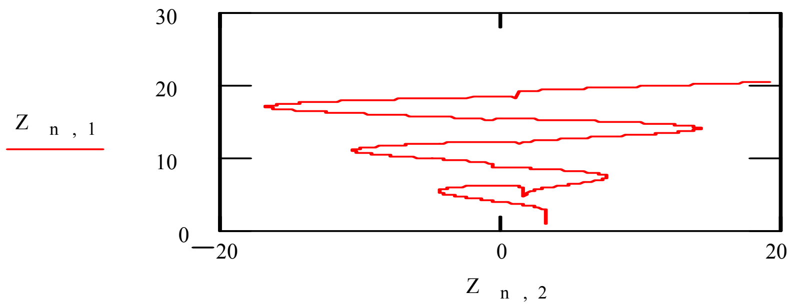
Например:

$$ic := \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$D(t,x) := \begin{pmatrix} \dfrac{x_1}{x_0 \cdot \sin(t)} \\ \cos(t) \cdot x_0 \end{pmatrix}$$

$$Z := \text{rkfixed}(ic, 1, 20, 1000, D)$$

$$n := 0 \ldots 999$$



В *Mathcad* существуют специальные функции для решения отдельно мягких и жёстких систем ОДУ.

Система ОДУ называется *мягкой,* если изменение шага интегрирования не влияет на сходимость решения. Её решениями являются гладкие функции, поэтому для нахождения их лучше воспользоваться функцией *Bulstoer*.

Система ОДУ называется *жесткой*, если шаг интегрирования должен оставаться достаточно малым, чтобы решение сходилось. Система дифференциальных уравнений, записанная в виде $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$ является жёсткой системой, если матрица A почти вырождена. В этом случае решение, возвращаемое функцией *rkfixed*, может сильно осциллировать или быть неустойчивым. При решении жёсткой системы необходимо использовать одну из двух функций, специально предназначенных для решения жёстких систем дифференциальных уравнений: *Stiffb* и *Stiffr*.

Функция *Bulstoer*(y, $x1$, $x2$, *npoints*, D) основана на методе Булириша-Стоера, который более точен, чем метод Рунге-Кутта, и используется для решения нежестких систем ОДУ. Изложение методов, используемых при решении систем ОДУ не приводится, поскольку их работа осуществляется автоматически и не зависит от воли пользователя. Пользователю необходимо правильно выбрать функцию для решаемой им системы ОДУ и задать входные параметры согласно ее описанию. Все результаты будут выведены согласно описанию используемой функции.

Для решения жёстких систем ОДУ применяются функции *Stiffb*(y, $x1$, $x2$, *npoints*, D, J) и *Stiffr*(y, $x1$, $x2$, *npoints*, D, J), у которых J – функция, возвращающая матрицу $n\times(n+1)$, первый столбец которой содержит производные, а оставшаяся часть – якобиан матрицы системы дифференциальных уравнений. *Stiffb* основан на методе Булириша-Стоера, а *Stiffr* – на методе Розенброка.

Матрица J для системы ОДУ с двумя неизвестными получается следующим образом:

Пусть $$D(t,P) := \begin{pmatrix} t \cdot P_0 - t^3 \cdot P_1 \\ sin(t \cdot P_0) \cdot P_1 \end{pmatrix}$$

Преобразуем, убрав индексы:

$$\Delta(t,P0,P1) := \begin{pmatrix} t \cdot P0 - t^3 \cdot P1 \\ sin(t \cdot P0) \cdot P1 \end{pmatrix}$$

Теперь определим следующую матрицу:

$$Jacobstiff\ (A, x, y, z) := \begin{bmatrix} \frac{d}{dx}\left(A(x,y,z)_0\right) & \frac{d}{dy}\left(A(x,y,z)_0\right) & \frac{d}{dz}\left(A(x,y,z)_0\right) \\ \frac{d}{dx}\left(A(x,y,z)_1\right) & \frac{d}{dy}\left(A(x,y,z)_1\right) & \frac{d}{dz}\left(A(x,y,z)_1\right) \end{bmatrix}$$

Вычислим символьно матрицу Якобиана для нашей системы:

$$Jacobstiff\left(\Delta, t, P0, P1\right) \to \begin{pmatrix} P0 - 3\cdot t^2\cdot P1 & t & -t^3 \\ cos(t\cdot P0)\cdot P0\cdot P1 & cos(t\cdot P0)\cdot t\cdot P1 & sin(t\cdot P0) \end{pmatrix}$$

Теперь, опустив опять индексы, получим функцию J:

$$J(t, P) := \begin{pmatrix} P_0 - 3\cdot t^2\cdot P_1 & t & -t^3 \\ P_0\cdot cos\left(t\cdot P_0\right)\cdot P_1 & t\cdot cos\left(t\cdot P_0\right)\cdot P_1 & sin\left(t\cdot P_0\right) \end{pmatrix}.$$

Существует ещё одна функция для решения систем ОДУ, а именно для решения медленно меняющихся систем ОДУ. Эта функция – *Rkadapt*(*y*, *x*1, *x*2, *npoints*, *D*). Используется она аналогично *rkfixed*, но, в отличие от *rkfixed*, которая интегрирует равными шагами, *Rkadapt* анализирует скорость изменения решения и соответственно адаптирует размер шага.

Задавшись фиксированным числом точек, можно аппроксимировать функцию более точно, если вычислять её значения в точках, расположенных следующим образом: достаточно часто на тех интервалах, где функция меняется быстро; и не очень часто там, где функция изменяется медленнее.

Адаптированный контроль величины шага даёт возможность функции *Rkadapt* вычислять значение приближённого решения на более мелкой сетке в тех областях, где оно меняется быстро, и на более крупной в тех областях, где оно меняется медленно. Это позволяет и повысить точность, и сократить время, требуемое для решения уравнения.

Хотя функция *Rkadapt* при решении дифференциального уравнения использует во внутренних расчётах переменный шаг, она возвращает приближённое решение на равномерной сетке (в равноотстоящих точках).

Функция *Rkadapt* имеет те же самые аргументы, что и функция *rkfixed*. Матрица с приближённым решением, возвращаемая функцией *Rkadapt*, идентична по виду матрице, возвращаемой функцией *rkfixed*.

4.3. Аналитическое решения ДУ

У *Mathcad* очень небольшие возможности символьного решения дифференциальных уравнений. В частности, для решения ОДУ первого порядка можно записать готовую формулу для задачи Коши и символьно её проинтегрировать.

Приводящиеся в ряде пособий примеры решения дифференциальных в символьном виде фактически демонстрируют общие формулы решения ОДУ, приводящиеся в различных учебниках по решению ОДУ, выполненные авторами с использованием текстовых возможностей изображения формул в *Mathcad*.

4.4. Упражнения

1. Решить ОДУ первого порядка:

а) $y' = \dfrac{y}{x} + \sqrt{x^2 - 3x + 1}$, $y(1) = 1$; б) $y' = 2 \cdot \sqrt{|y|}$, $y(0) = 1$;

в) $y' = 2 \cdot \sqrt{|y|^3}$, $y(1) = 0$; г) $y' = 2 \cdot |x|$, $y(0) = 1$;

д) $y' = x^2 y^3 + xy^2 + y + x$, $y(-1) = 0$;

е) $y' = xy^3 + x^2 y^2 + x$, $y(2) = 0$; ж) $y' = \sqrt{xy} + x$, $y(1) = 1$;

з) $3y' = xy^3 + xy^2 + x^3 y$, $y(1) = 0$; и) $y' = \sqrt{4xy} + 2x$, $y(0) = 1$;

к) $y' = \dfrac{4y}{x} + \sqrt{2x^2 - x + 1}$, $y(0) = 1$; л) $y' = \dfrac{y}{x} + \sqrt{x^2 - 2x}$, $y(0) = 2$;

м) $y' = \dfrac{7y^2}{x} + x^3 - 3x + 2$, $y(-2) = 1$; н) $y' = \dfrac{\sqrt{y}}{x} + xy$, $y(5) = 1$;

о) $y' = x\sqrt{xy \cdot y^3} + x^2 + 3x$, $y(1) = 1$;

п) $y' = e^{-2x}xy + xy - 8x + 15$, $y(0) = 1$.

2. Решить ОДУ второго порядка:

а) $y'' + (x^2 - 9)\sin y' + (x^2 - 3x + 2)y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0.5$;

б) $y'' = \dfrac{2y - 1}{y^2 + 1}y'^2$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$;

в) $y'' = \dfrac{2(y'^2 + 1)(xy' - y)}{y^2 + x^2}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$;

г) $y'' = -\dfrac{y'^2}{y} + \dfrac{3x + 4}{y^2}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$;

д) $y'' = \dfrac{4y - 1}{y + 5}y'^2$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$;

е) $y'' = \dfrac{12y + 31}{y^2 + 11}y'^2$, $y(0) = 11$, $y'(0) = 1$;

ж) $y'' + x^3 \sin y' + (3x^2 + 5x + 1)y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$;

з) $4y'' + (x^2 - 4)y' + (5x + 12)y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0.5$;

и) $2y'' = -\dfrac{5y'^2}{y} + \dfrac{6x + 7}{4y^2}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$;

к) $y'' = -\dfrac{y'^2}{y} + \dfrac{4x + 5}{y}$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 1$;

л) $y'' + 6xy' + (-9x^2 - 4x + 11)y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$;

м) $15y'' + \sin(\pi x / 3)^2 y' + (\cos x + 12\sin x - 11)y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0.5$.

3. Решить системы ОДУ:

а) $\begin{cases} y_1' = \sin(xy_1) + xy_2 \\ y_2' = \cos(xy_2) - 1 \end{cases}$, $\begin{cases} y_1(0) = 1 \\ y_2(0) = 0 \end{cases}$;

б) $\begin{cases} y_1' = y_1 y_2 + 1 \\ y_2' = y_2^2 + y_1 \end{cases}, \quad \begin{cases} y_1(0) = 1 \\ y_2(0) = -1 \end{cases};$

в) $\begin{cases} y_1' = (y_1^2 + y_2 + y_3)\lg x \\ y_2' = (y_2 y_3 - y_1)\sqrt[3]{x} \\ y_3' = \dfrac{y_2 y_1 + y_3}{x} \end{cases}, \quad \begin{cases} y_1(0) = 1 \\ y_2(0) = -2 \\ y_3(0) = 0 \end{cases};$

г) $\begin{cases} y_1' = y_1^2 y_2 y_3 \\ y_2' = y_2 \sqrt{y_1 y_3} \\ y_3' = \dfrac{y_2}{y_1 + y_3} \end{cases}, \quad \begin{cases} y_1(0) = 1 \\ y_2(0) = 0.5 \\ y_3(0) = -0.5 \end{cases};$

д) $\begin{cases} y_1' = (x y_1 + y_2)^3 + x^2 y_2 \\ y_2' = (x y_1 - y_2)^2 - x \end{cases}, \quad \begin{cases} y_1(0) = 2 \\ y_2(0) = 1 \end{cases};$

е) $\begin{cases} y_1' = (y_1^3 + y_2^2 + y_3^5)x^3 \\ y_2' = (x y_2 + x^{-1} y_3 - x^2)\sqrt[3]{y_2} \\ y_3' = \dfrac{y_2 - y_1 + y_3}{x^2} \end{cases}, \quad \begin{cases} y_1(0) = -3 \\ y_2(0) = -1 \\ y_3(0) = 1 \end{cases};$

ж) $\begin{cases} y_1' = \cos(y_1 + y_2 + y_3)\sin x \\ y_2' = \sin(y_2 - y_3 - y_1)\cos x^2 \\ y_3' = \dfrac{\cos(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2)}{\sin(1 + x^2)} \end{cases}, \quad \begin{cases} y_1(0) = 5 \\ y_2(0) = 2 \\ y_3(0) = 3 \end{cases};$

з) $\begin{cases} y_1' = \sin(x y_1 + x^4 y_2) \\ y_2' = \cos^2(x y_2 - y_1) \end{cases}, \quad \begin{cases} y_1(0) = \sqrt{2}/2 \\ y_2(0) = 1 \end{cases};$

и) $\begin{cases} y_1' = \lg(x y_1^2 + x^2 y_2 + x^{-1} y_3) \\ y_2' = (y_2 y_3 - y_1) \cdot x^{-2} \\ y_3' = \dfrac{\sin(y_2 y_1 + y_3)}{x} \end{cases}, \quad \begin{cases} y_1(0) = 2 \\ y_2(0) = 1 \\ y_3(0) = -1 \end{cases};$

$$\text{к)}\ \begin{cases} y_1' = \sin(y_1^2 y_2 y_3 / x^3) \\ y_2' = \cos(y_2 y_3 y_1)\sqrt[3]{x} \\ y_3' = \operatorname{tg}\dfrac{y_2 y_1 y_3}{6x^2} \end{cases}, \qquad \begin{cases} y_1(0) = 0 \\ y_2(0) = 1 \\ y_3(0) = 3 \end{cases};$$

$$\text{л)}\ \begin{cases} y_1' = x^2(\sin y_1^2 + \cos y_2 + \sin y_3) \\ y_2' = (\cos y_2 \sin y_3 - \cos y_1)\sin x \\ y_3' = \dfrac{\sin y_2 \sin y_1 + \cos y_3}{\sin x^3} \end{cases}, \qquad \begin{cases} y_1(0) = -1 \\ y_2(0) = -1 \\ y_3(0) = 1 \end{cases};$$

$$\text{м)}\ \begin{cases} y_1' = \lg y_1^2 y_2^2 y_3 \cdot \lg x \\ y_2' = y_2 y_3 \cdot \lg x y_1^2 \\ y_3' = \dfrac{y_2 + y_1 + y_3}{x} \end{cases}, \qquad \begin{cases} y_1(0) = 2 \\ y_2(0) = 1 \\ y_3(0) = 1 \end{cases}.$$

4.5. Выводы

1. В *Mathcad* имеется ряд встроенных функций для численного решения ОДУ и систем ОДУ.

2. Решения дифференциальных уравнений могут быть получены в графическом и табличном виде.

3. Метод Рунге–Кутта использован в функциях *odesolve* и *rkfixed*.

4. *Mathcad* позволяет решать нежёсткие системы ОДУ с помощью функции *Bulstoer*.

5. Жёсткие системы решаются функциями *Stiffb* и *Stiffr*.

6. Функция *Rkadapt* позволяет ввести адаптивный контроль величины шага в зависимости от характера изменения функции-решения.

7. Аналитическое решение методами *Mathcad* возможно для весьма ограниченного класса ОДУ.

5. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ И

ВОЛНОВЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

5.1. Спектральный анализ

В радиотехнических расчётах для представления периодических сигналов используют функции времени $y(t)$ на отрезке $[0, T]$ с периодом $T = 1/f_1$, где f_1 – частота первой гармоники периодического сигнала. В этом случае интегрируемую на отрезке $[0, T]$ функцию $y(x)$, удовлетворяющую условиям Дирихле можно представить в виде ряда Фурье

$$y(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos(2\pi k f_1 t) + b_k \sin(2\pi k f_1 t)).$$

Коэффициенты вычисляются по следующим формулам:

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T y(t)\cos(2\pi k f_1 t)dt\,;\; b_k = \frac{2}{T}\int_0^T y(t)\sin(2\pi k f_1 t)dt.$$

В этом случае коэффициенты a_k и b_k описывают косинусную и синусную составляющие k-й гармоники сигнала с периодом T и частотой повторения $f_1 = 1/T$.

Часто используется иная форма ряда Фурье, упрощающая его синтез:

$$y(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(2\pi k f_1 t + \varphi_k),$$

где A_k – амплитуда k-й гармоники периодического сигнала, $A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$;

φ_k – фаза k-й гармоники;

$$\varphi_k = -\arctan\frac{b_k}{a_k}.$$

Разложение функции на гармонические составляющие, то есть вычисление коэффициентов Фурье, принято называть *спектральным анализом.* А воссоздание приближения функции рядом Фурье, т.е. получение её тригонометрического представления, называют *спектральным синтезом*.

Гармонику с $k = 1$ называют *основной*, или *первой*, *гармоникой* сигнала. Она задаёт его частоту повторения f_1. Остальные гармоники называют *высшими*, их частоты равны $f_k = kf_1$, где $k = 2, 3, 4, \ldots$ Таким образом, спектр периодических сигналов *дискретный* – он содержит набор фиксированных частот f_k. У непериодических сигналов спектр будет *сплошным*, и вместо амплитуды гармоник он характеризуется *спектральной плотностью* сигнала.

Переход от некоторой функции $f(t)$ к параметрам её ряда Фурье (амплитудам и фазам гармоник) называется *прямым преобразованием Фурье*.

Преобразование Фурье – функция $F(z)$, построенная по заданной функции $f(x)$ по формуле: $F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{izu} du$.

Если для $f(x)$ справедлива интегральная формула Фурье, то в силу комплексной формы интеграла Фурье $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(z) e^{-izu} dz$. Таким образом, записанная функция $f(x)$ будет обратным преобразованием Фурье функции $F(z)$.

К сожалению, вычисление интегралов, подынтегральные функции в которых быстро осциллируют, существенно затруднено при заданной точности и ведёт к значительным затратам времени.

5.2. Преобразования Фурье

Стандартными функциями для преобразования Фурье в *Mathcad* являются *fft*(*A*), *ifft*(*B*), *FFT*(*A*), *IFFT*(*B*).

Если сигнал представлен в виде вектора дискретных значений, то применяется *дискретное* преобразование Фурье (ДПФ), для которого существует алгоритм эффективной реализации вычислений, называемый *быстрым* преобразованием Фурье (Fast Fourier Transform).

Функция fft(A) возвращает преобразование Фурье для вектора. Результатом является $1+2^{m-1}$ – элементный вектор, k-ый элемент которого равен

$$c_j = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_k A_k e^{i(2\pi j/n)k} ,$$

где n – число элементов в A;

i – мнимая единица.

В исходном векторе A должно содержаться чётное (больше 2) число действительных элементов. В противном случае выводится сообщение об ошибке – неверном размере вектора.

FFT(*A*) отличается только формулой, по которой получаются элементы преобразования:

$$c_j = \frac{1}{n} \sum_k A_k e^{-i(2\pi j/n)k} .$$

ifft(*B*) возвращает обратное преобразование Фурье. Результатом является 2^m – элементный вектор, k-й элемент которого равен

$$c_j = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_k B_k e^{-i(2\pi j/n)k} .$$

В векторе B должно содержаться $1 + 2^{m-1}$ элементов.

Функция *IFFT*(*B*) также осуществляет обратное преобразование Фурье и соответствует *FFT*(*A*).

Также существуют функции преобразования для векторов, содержащих комплексные величины или с числом элементов, не соответствующим требованиям для функций *fft*(*A*) и *ifft*(*B*), а именно:

cfft(*A*), *icfft*(*B*), *CFFT*(*A*), *CFFT*(*B*).

Функции *CFFT*(*A*) и *ICFFT*(*B*) аналогичны соответственно функциям *cfft*(*A*) и *icfft*(*B*) за исключением нормализующей величины и знаков. Поэтому к ним следует обращаться по аналогии.

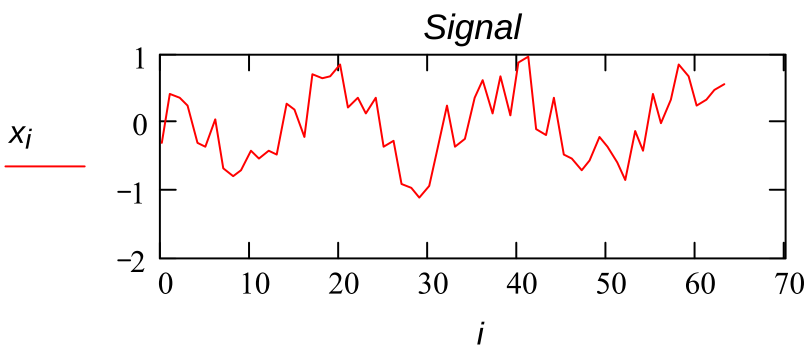
Mathcad, кроме преобразований Фурье, способен выполнять wavelet-преобразования (*wave*(*v*) и *iwave*(*u*)), которые используются для прямоугольных сигналов.

5.3. Примеры выполнения преобразований

1. Быстрое преобразование Фурье:

Пусть задан следующий сигнал:

$$i := 0\,..\,63 \qquad x_i := \cos\left(\pi \cdot \frac{i}{10}\right) \cdot rnd(1) + rnd(1) - .5$$

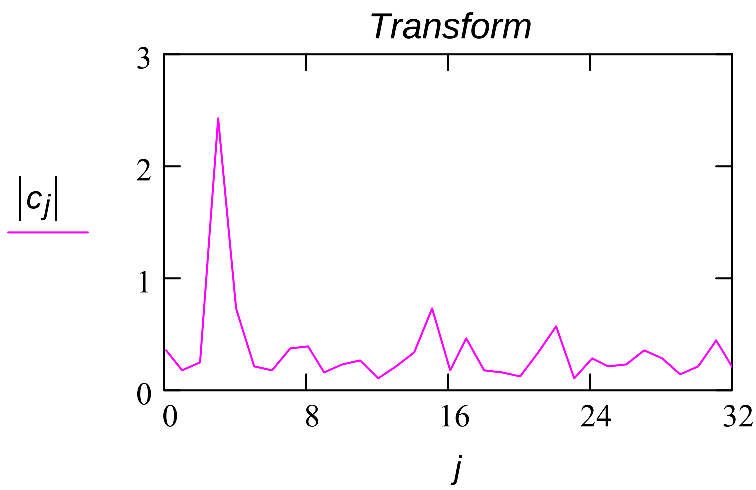


Осуществим преобразование Фурье:

$$c := fft(x)$$

$$N := last(c) \qquad N = 32$$

$$j := 0 .. N$$



Осуществим обратное преобразование:

$$z := \mathrm{ifft}(c)$$

$$N2 := \mathrm{last}(z) \qquad N2 = 63$$

$$k := 0 .. N2$$

Максимальная разница после прямого и обратного преобразований:

$$max\left(\overrightarrow{|x - z|}\right) = 2.915 \times 10^{-12}$$

5.4. Упражнения

1. Выполнить преобразование Фурье для следующих функций:

а) $f(t) = 5e^{-3t} + 4e^{-2t}$ на отрезке [0;6];

б) $f(t) = 14e^{-it} + 6e^{2it}$ на отрезке [0;4];

в) $f(t) = 6e^{-2t} + 4e^{-3t} + 5e^{-5t}$ на отрезке [0;10];

г) $f(t) = e^{-2it} + e^{-4it} + e^{-5it}$ на отрезке [0;9];

д) $f(t) = 7e^{-2t} - 4e^{-3t} - 11e^{-5t}$ на отрезке [0;10];

е) $f(t) = 3e^{-2it} + 5e^{-4it} + 7e^{-5it}$ на отрезке [0;9];

ж) $f(t) = -2e^{-2it} + 3e^{-4it} + e^{-5it}$ на отрезке [0;8];

з) $f(t) = -5e^{-2it} - 8e^{-4it} + 3e^{-5it}$ на отрезке [0;9].

2. Выполнить преобразование Фурье для следующих векторов с действительными элементами:

а) (0; 111123; 0, 75324; 0; – 0, 511123; – 0, 123335; 0; 0, 233412; 0, 1253456; 0; – 0, 062511664; – 0, 03118925);

б) (0, 4367789; 1, 2332422; 0, 984444; – 0, 3344; – 0, 177455; 0; 0, 112555; 0, 1343675434; 0; – 0, 06789964; – 0, 01276589);

в) (0, 112313; 1, 324617; 0, 897545; 0; – 0, 1657; – 0, 19215333; 0, 001; 0, 1325787; 0, 14525; 0, 0096; – 0, 01996; – 0, 0541281);

г) (0, 342219872; 5, 234429865111; 0, 498218222; – 0, 43321322; – 0, 1772322119; 0; 0, 11252217893; 0, 1345611123; 0; – 0, 06789989866564; – 0, 01276589);

д) (0, 211333211873; 1, 23245646897; 0, 2897544565; 0.0000111123; – 0, 2165487657; – 0, 3192153; 0, 20015111; 0, 198772351; 0, 11325788977; 0, 114525; 0, 008976; – 0, 02996; – 0, 0341281);

е) (1, 113343; 0, 324656; 0, 89755678; 0, 1121111; – 1, 1655667; – 2, 192153; 1, 001234; 1, 132578677; 2, 145254988; 3,009665786; – 1,01996; – 2, 0541281);

ж) (0, 31236532222; 1, 624645512; 0, 997485312; 0, 127658789; – 0, 36548977; – 0, 592153; 0, 9723001; 0, 4325787; 0, 64525; 0, 0012963211; – 0, 0341996; – 0, 023541281).

3. Выполнить преобразование Фурье для векторов с комплесными элементами:

а) (1 + 6i; 2 + 5i; 3 + 6i; 4 + 4i; 5 + 3i; 6 + 2i; 7 + i; 8i);

б) (16 + 11i; 14 + 13i;1 9 + 31i; 5 +17i; 8 +13i; 14 + 3i; 5 + 21i; 27+ 23i; 19 + 21i;18 + 11i);

в) (33 +36i;42 + 35i; 23 + 16i; 41 + 52i; 15 + 31i; 23 + 17i; 27 + i; 33 + 28i; 26 + 17i; 15 + 21i; 22 + 33i).

г) (19 + 11i; 17 + 13i; 13 + 11i; 15 +27i; 8 +23i; 24 + 3i; 15 + 11i; 37+ 23i; 39 + 21i;16 + 12i).

4. Выполнить спектральное разложение:

а) прямоугольного импульса;

б) симметричного треугольного импульса;

в) полусинусоидального импульса;

г) симметричного трапециевидного импульса.

5.5. Выводы

1. В *Mathcad* возможно спектральное разложение и синтез импульса.
2. Импульс может задаваться в виде вектора как с действительными, так и с комлексными значениями.
3. Функции *fft* и *ifft* дают точные (в пределах погрешности чиленных расчётов) обращения.
4. Равенство *ifft*(*fft*(*v*)) = *v* можно использовать для проверки преобразований.
5. Функция *cfft*(*A*) реализует прямое преобразование Фурье для вектора *A* с комплексными компонентами, а функция *icfft*(*B*) – обратное преобразование Фурье.

6. ОБРАБОТКА ДАННЫХ И СТАТИСТИКА

6.1. Линейная и сплайновая аппроксимации

Для представления физических закономерностей, а также при проведении научно-технических расчётов часто используются зависимости вида y(x), причём число заданных точек этих зависимостей ограничено. Неизбежно возникает задача приближённого вычисления значений функций в промежутках между узловыми точками и за их пределами. Эта задача решается аппроксимацией исходной зависимости, то есть её подменой какой-либо достаточно простой функцией. Система *Mathcad* предоставляет возможность аппроксимации двумя важными типами функций: кусочно-линейной и сплайновой.

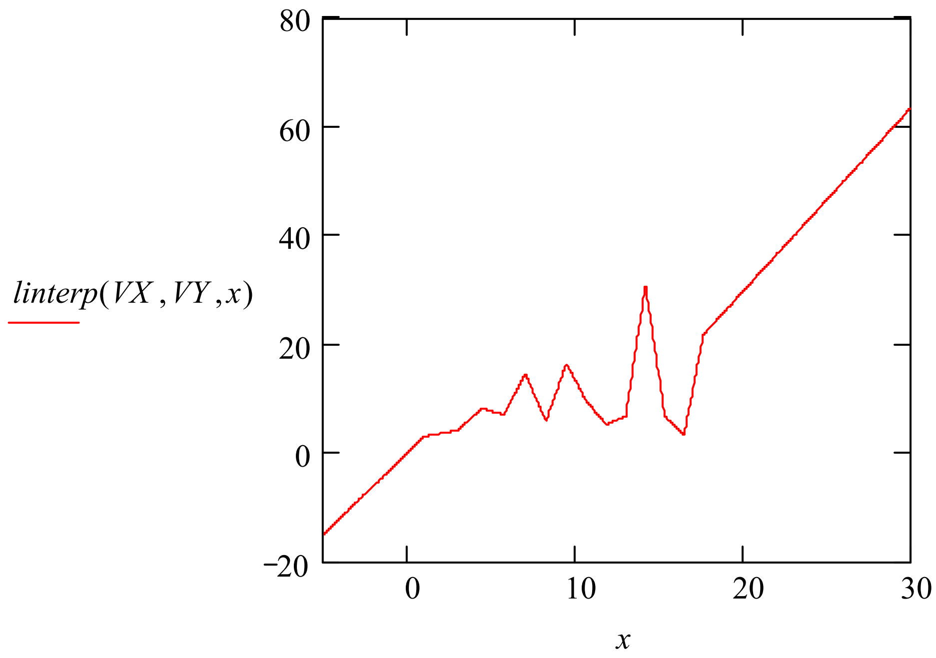
При кусочно-линейной интерполяции вычисления дополнительных точек выполняются по линейной зависимости, для чего используется функция *linterp(VX, VY, x)*. Для заданных векторов узловых точек *VX* и *VY* и заданного аргумента *x* функция возвращает значение функции при её линейной аппроксимации (интерполяции).

При экстраполяции используются отрезки прямых, проведённых через две крайние точки.

Например:

$$i := 1 .. 15$$

$$VX_i := i + \sqrt{i-1} \quad VY_i := 3 + 2 \cdot rnd(1) \cdot VX_i$$



При небольшом числе узловых точек линейная интерполяция оказывается довольно грубой. Гораздо лучшие результаты даёт сплайн-интерполяция. При ней исходная функция заменяется отрезками кубических полиномов, проходящих через три смежные узловые точки. Коэффициенты полиномов рассчитываются так, чтобы непрерывными были первая и вторая производные.

Для того, чтобы получить сплайн-интерполированное значение таблично заданной функции, нужно воспользоваться функцией

interp(vs,vx,vy,x),

где *vs* – вектор вторых производных таблично заданной функции,

vx и *vy* – вектора узловых точек.

Для получения вектора *vs* по заданным узловым точкам служат следующие три функции:

cspline(vx,vy) – для кубической кривой в узловых точках;

pspline(vx,vy) – для параболической кривой в узловых точках;

lspline(vx,vy) – для линейной в узловых точках функции.

Пример сплайн-интерполяции:

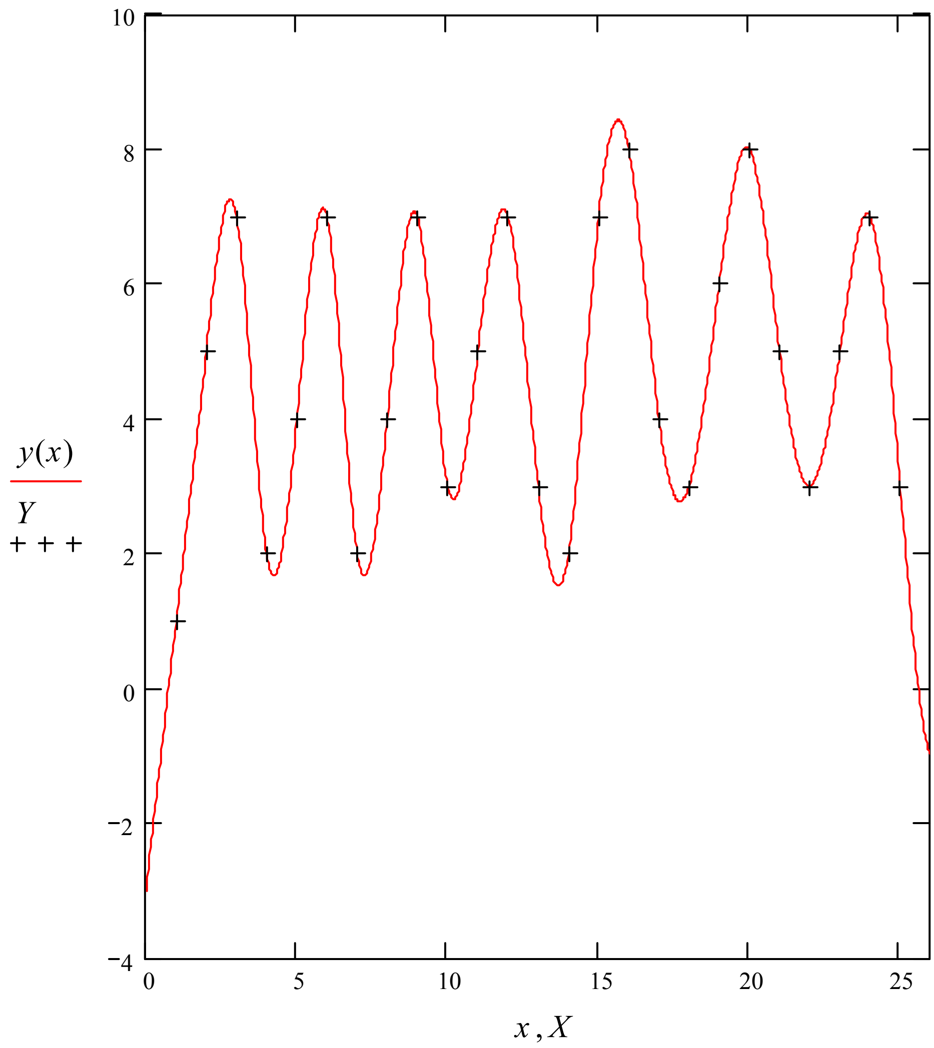
$data :=$

	0	1
0	1	1
1	2	5
2	3	7
3	4	2
4	5	4

$X := data^{\langle 0 \rangle}$ $\qquad$ $Y := data^{\langle 1 \rangle}$

$S := lspline(X, Y)$

$y(x) := interp(S, X, Y, x)$



При сплайн-интерполяции график функции оказывается плавным и точки его перегиба не выглядят остриями, как при линейной интерполяции.

6.2. Статистическая обработка данных

При выполнении экспериментов их данные обычно представляются с той или иной случайной погрешностью, поэтому их обработка нуждается в соответствующих статистических методах. С помощью *Mathcad* можно проводить наиболее распространённые статистические расчёты с данными, представленными векторами их значений.

6.2.1. Функции анализа данных

В *Mathcad* присутствует огромное множество статистических функций. Здесь мы опишем основные:

cvar(A,B) – ковариация элементов двух $m \times n$ массивов *A* и *B*;

corr(A,B) – Пирсонов корреляционный коэффициент для двух $m \times n$ массивов *A* и *B*;

gcd(A,B,C,...) – наибольший общий делитель для чисел *A*, *B*, *C*;

gmean(A,B,C,...) – геометрическое среднее для чисел *A*, *B*, *C*;

hmean(A,B,C,...) – гармоническое среднее для *A*, *B*, *C*;

kurt(v) – эксцесс для вектора *v*;

lcm(A,B,C,...) – наименьшее общее кратное для чисел *A*, *B*, *C*;

mean(A,B,C,...) – арифметическое среднее для чисел *A*, *B*, *C*;

median(A,B,C,...) – медиана для чисел *A*, *B*, *C*;

mode(A,B,C,...) – мода (наиболее часто встречающееся значение ряда) для *A*, *B*, *C*;

skew(v) – коэффициент асимметрии для вектора *v*;

stdev(A,B,C,...) или *Stdev(A,B,C,...)* – среднее квадратическое отклонение (*Stdev(A,B,C,...)* – несмещённая оценка);

var(A,B,C,...) или *Var(A,B,C,...)* – дисперсия (*Var(A,B,C,...)* – несмещённая оценка).

6.2.2. Функции распределений

Функции для работы с основными плотностями вероятности подразделяются на следующие классы:

плотности вероятности – дают вероятность того, что случайная величина примет определённое значение;

функции распределения – дают вероятность того, что случайная величина примет значение меньшее или равное определённого значения. Они могут быть получены путём простого интегрирования соответствующих плотностей вероятности на области определения;

обратные функции распределения – это функции, которые используют вероятность в качестве аргумента и возвращают такое значение, чтобы случайная величина с данной вероятностью принимала значения меньшие или равные ему.

В *Mathcad* присутствует огромное множество функций распределений. Здесь мы опишем наиболее часто применяющиеся функции. Присутствуют как численные величины этих распределений, так и графическое представление, которое может быть выведено на экран при обращении к используемой функции распределения.

Биноминальное распределение:

dbinom(k,n,p) – плотность вероятности;

pbinom(k,n,p) – функция распределения;

qbinom(p,n,r) – обратная функция распределения;

rbinom(m,n,p) – возвращает вектор из *m* значений, распределённых по биноминальному закону.

χ^2 распределение:

dchisq(x,d) – плотность вероятности;

pchisq(x,d) – функция распределения;

qchisq(p,d) – обратная функция распределения;

rchisq(m,d) – возвращает вектор из *m* значений, распределённых по закону χ^2.

Показательное распределение:

dexp(x,r) – плотность вероятности;

pexp(x,r) – функция распределения;

qexp(p,r) – обратная функция распределения;

rexp(m,r) – возвращает вектор из *m* значений, распределённых по показательному закону.

Геометрическое распределение:

dgeom(k,p) – плотность вероятности;

pgeom(k,p) – функция распределения;

qgeom(p,r) – обратная функция распределения;

rgeom(m,p) – возвращает вектор из *m* значений, распределённых по геометрическому закону.

Нормальное распределение:

dnorm(x,μ,σ) – плотность вероятности;

pnorm(x,μ,σ) – функция распределения;

cnorm(x) – функция распределения со средней 0 и дисперсией 1;

qnorm(p,μ,σ) – обратная функция распределения;

rnorm(m,μ,σ) – возвращает вектор из *m* значений, распределённых по нормальному закону.

Распределение Пуассона:

dpois(k,λ) – плотность вероятности;

ppois(k,λ) – функция распределения;

qpois(p,λ) – обратная функция распределения;

rpois(m,λ) – возвращает вектор из *m* значений, распределённых по закону Пуассона.

Распределение Стьюдента:

dt(x,d) – плотность вероятности;

pt(x,d) – функция распределения;

qt(p,d) – обратная функция распределения;

rt(m,d) – возвращает вектор из *m* значений, распределённых по закону Стьюдента.

Равномерное распределение:

dunif(x,a,b) – плотность вероятности;

punif(x,a,b) – функция распределения;

qunif(p,a,b) – обратная функция распределения;

rnd(x) – возвращает случайную величину между 0 и *x*, подчиняющуюся равномерному закону;

runif(m,a,b) – возвращает вектор из *m* значений, распределённых по равномерному закону.

В *Mathcad* также существуют соответствующие функции для распределений, имеющих следующие названия:

бета-распределение;

распределение Коши;
F-распределение;
гамма-распределение;
гипергеометрическое распределение;
логарифмическое нормальное распределение;
логистическое распределение;
негативное биноминальное распределение;
распределение Вейбула.

6.2.3. Гистограммы

В *Mathcad* существуют две специальные функции для построения гистограмм:

hist(intvls,data) – возвращает вектор, состоящий из частот, с которыми значения из вектора *data* попадают на интервалы, содержащиеся в *intvls*;

histogram(intvls,data) – возвращает матрицу с двумя столбцами. Первый столбец содержит средние точки *n* подынтервалов одинаковой длины области *min(data)* ≤ значение ≤ *max(data)*. Второй столбец идентичен вектору, возвращаемому функцией *hist(n,data)*, поэтому результирующая матрица имеет *n* строк.

Для обеих функций аргумент *intvls* может быть:

вектором интервалов, являющихся действительными числами в возрастающем порядке; при этом в возвращаемом векторе *i*-й элемент будет показывать число точек из *data*, попадающих между *i*-м и *(i+1)*-м элементами *intvls*;

целым числом большим нуля, показывающим число подынтервалов одинаковой длины.

6.2.4. Комбинаторика

В *Mathcad* также существуют две функции, позволяющие быстро рассчитывать сочетания и перестановки.

combin(n,k) – число сочетаний из *n* по *k*.

permut(n,k) – число размещений из *n* по *k*.

Эти функции позволяют быстро решать различные задачи с элементами теории вероятностей.

6.3. Регрессия

При исследовании различных явлений часто приходится иметь дело со взаимосвязанными показателями. При этом часто связь, существующая между двумя или несколькими показателями, скрыта, усложнена наслоением действия других причин (факторов). Изучить, насколько изменение одного показателя зависит от изменения другого (или нескольких), – одна из важнейших задач статистики. Следует различать функциональные и корреляционные связи. В отличие от *функциональной* зависимости, при которой каждому значению одной переменной строго соответствует одно определённое значение другой переменной, зависимость, при которой одному значению переменной (x) может соответствовать (в силу наслоения действия других причин) множество значений другой переменной (y), называют *корреляционной*. Корреляционная зависимость проявляется лишь на основе массового наблюдения.

Наиболее простым случаем корреляционной зависимости является парная корреляция, т.е. зависимость между двумя признаками – результативным и одним из факторных.

Основными задачами при изучении корреляционных зависимостей являются:

1) отыскание математической формулы, которая бы выражала эту зависимость y от x;

2) изменение тесноты такой зависимости.

Решение первой задачи, то есть определение формы связи с последующим отысканием параметров уравнения, называется нахождением уравнения связи – уравнения регрессии.

Возможны различные формы связи:

1) прямолинейная;

2) криволинейная в виде параболы второго порядка, гиперболы или показательной функции.

В *Mathcad* присутствуют следующие функции для определения уравнения регрессии.

Линейная регрессия:

slope(vx,vy) – тангенс угла наклона линии регрессии;

intercept(vx,vy) – точка пересечения линии регрессии с линией *Oy*;

line(vx,vy) – возвращает вектор, содержащий коэффициенты для линии регрессии ($a+b\cdot x$), наилучшим образом аппроксимирующей данные из векторов *vx*, *vy*;

medfit(vx,vy) – возвращает вектор, содержащий коэффициенты для линии регрессии, полученные методом медиан-медианной регрессии.

Полиномиальная регрессия:

regress(vx,vy,k) – возвращает вектор, используемый функцией *interp* для построения полинома *k*-й степени, наилучшим образом приближающегося к значениям из *vx* и *vy* (для нахождения полинома необходимо воспользоваться функцией *interp*);

loess(vx,vy,span) – возвращает вектор, используемый функцией *interp* для нахождения полинома второй степени, приближающегося к значениям точек из *vx*, *vy* (*span* контролирует расстояние от исходных точек, на котором может находиться парабола; чем больший разброс данных, тем большим должен быть параметр *span*; хорошие результаты даёт значение *span* = 0.75).

Специальная регрессия:

expfit(vx,vy,vg) – находит коэффициенты для экспоненциальной кривой, наилучшим образом соответствующей данным из *vx*, *vy*; в *vg* содержатся предполагаемые значения коэффициентов ($a \cdot e^{b \cdot x} + c$);

lgsfit(vx,vy,vg) – находит коэффициенты для логистической кривой ($\frac{a}{\left(1 + b \cdot e^{-c \cdot x}\right)}$), в *vg* содержатся предполагаемые значения коэффициентов;

sinfit(vx,vy,vg) – находит коэффициенты для гармонической кривой ($a \cdot \sin(x + b) + c$);

logfit(vx,vy,vg) – находит коэффициенты для логарифмической кривой вида $a \cdot \ln(x + b) + c$;

lnfit(vx,vy) – находит коэффициенты для логарифмической кривой вида $a \cdot \ln(x) + b$;

pwrfit(vx,vy,vg) – находит коэффициенты для кривой вида $a \cdot x^b + c$.

Генерализованная регрессия:

linfit(vx,vy,F) – возвращает вектор, содержащий коэффициенты, используемые для составления линейной комбинации функций, содержащихся в *F*, наилучшим образом соответствующей значениям из *vx*, *vy*.

6.4. Функции сглаживания данных

Обычно полученные в результате опыта экспериментальные значения расположены не совсем правильным образом – дают некоторый "разброс", то есть обнаруживают случайные отклонения от видимой общей закономерности. Эти уклонения связаны с неизбежными при всяком опыте ошибками измерения.

Для устранения этих ошибок решается задача *сглаживания* экспериментальной зависимости.

В *Mathcad* существуют три функции сглаживания:

medsmooth(vy,n) – возвращает вектор, полученный сглаживанием *vy* со смещающимися медианами с окном ширины *n*;

ksmooth(vx,vy,b) – возвращает вектор, полученный сглаживанием с использованием ядра Гаусса для вычисления средневзвешенных элементов из *vy*;

supsmooth(vx,vy) – возвращает вектор, полученный путём сглаживания адаптивным методом наименьших квадратов.

В любом случае после сглаживания получается кривая, намного более гладкая, чем кусочно-линейная функция, соединяющая точки друг с другом в последовательном порядке. При сглаживании бывает полезно применение функции *sort(Y)*, сортирующей данные векторов, что иногда уменьшает погрешности численного алгоритма сглаживания.

6.5. Функция предсказания

В *Mathcad* используется линейный алгоритм предсказания. Предсказание осуществляется функцией *predict(v,m,n)*, возвращающей вектор из *n* предсказанных значений на основе *m* последних элементов из *v*.

6.6. Упражнения

1. Выполнить кусочно-линейную интерполяцию следующих функций, заданных таблично:

а) $x_i = i^2 - 1$, $y_i = 3x_i - 5\sin x_i$, $i = 1,..., 20$;

б) $x_i = i + \sqrt[3]{i+1}$, $y_i = e^{i+\sin i}$, $i = 1,..., 30$;

в) $x_i = \sin i$, $y_i = x_i^2 - \cos i$, $i = 1,..., 40$;

г) $x_i = i^3 + 2i + 5$, $y_i = \cos 6x_i + \sin 8x_i$, $i = 1,..., 20$;

д) $x_i = \cos i$, $y_i = x_i^2 - \cos i$, $i = 1,..., 30$;

е) $x_i = \sin(i+6)$, $y_i = 5x^2{}_i + 4x_i - 3$, $i = 1,..., 20$;

ж) $x_i = \ln(i+1)$, $y_i = x_i^3 - i^2$, $i = 1,..., 40$;

з) $x_i = (i-1)(2i+4)$, $y_i = x_i^2 - \cos i$, $i = 1,..., 30$;

и) $x_i = e^{i-1}$, $y_i = x_i - 12$, $i = 1,..., 20$;

к) $x_i = \sin\frac{\pi}{6}i$, $y_i = \sin x_i^2 - \cos i$, $i = 1,..., 40$;

л) $x_i = \ln(i^2 - 1)$, $y_i = (3x_i - 5)(x_i + 4)$, $i = 1,..., 20$;

м) $x_i = (8i-9)(4i+1)$, $y_i = x_i^3 - x_i^2 + 1$, $i = 1,..., 30$.

2. Выполнить сплайн-интерполирование функций, заданных таблично:

а)

x	3	4	8	9	10	12,5	13	14	15	16	18
y	4	7	9	9, 2	8, 8	6, 8	2	1	0, 9	0, 75	0, 5

;

б)

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12
y	1, 2	1, 8	2, 0	3, 5	4, 5	7, 5	8, 2	9, 6	10	10, 5

;

в)

x	1, 2	1, 3	1, 7	1, 8	1, 9	2, 1	2, 2	2, 4	2, 5
y	3	3, 2	3, 3	3, 5	3, 7	4, 2	4, 5	4, 9	5, 3

;

г)

x	2	3	3, 5	4	5	6	7	8	9	10	12
y	0, 2	0, 8	1, 8	2, 7	3, 9	5, 5	9, 5	6, 2	6	4	3, 5

д)

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	11	15
y	2	3, 8	4	5, 5	7	9, 5	10, 5	11, 2	12, 6	13	15, 5

е)

x	4	5	6	8	9	10	12	14	15	18	19
y	1, 2	1, 5	1, 8	2, 0	3, 5	4, 5	7, 5	8, 2	9, 6	10	10, 5

ж)

x	1	4	8	12	16	19	20	24	26	28	29
y	2, 2	4, 8	6, 8	8	9, 5	12	14	15	1 6	18	20, 5

и)

x	12	13	14	15	16	17	18	19	20
y	5, 2	6, 8	7, 5	8, 0	9, 5	10, 2	11, 4	12, 6	12, 8

к)

x	23	24	25	26	27	28	29	31	35
y	8	10	13, 5	15, 5	17, 85	21, 26	29, 63	32, 05	33, 5

л)

x	3	4	5	6	7	8	9	10	12
y	11, 8	21, 0	31, 5	44, 5	47, 5	48, 2	49, 6	51, 3	53, 5

м)

x	13	24	35	46	47	48	59	60	62
y	11, 8	21, 0	31, 5	44, 5	47, 5	48, 2	49,	51, 3	53, 5

3. Вычислить НОД и НОК для чисел:

а) 1212, 3626, 5648, 4232, 6454, 7896, 86794, 76584, 768242;
б) 1098, 2400, 3525, 4546, 5552, 5642, 5876, 5988, 6884;
в) 3240, 6800, 2345, 1700, 7895, 16785, 15455, 345555, 556780;
г) 2268, 4564, 6786, 13498, 13576, 16792, 16896, 15678, 23454;
д) 3165, 5685, 7840, 1215, 362060, 516485, 432325, 6145, 78965;
е) 3423, 4527, 6543, 12123, 36261, 56438, 42832, 64584, 78396;
ж) 4353, 7613, 2612, 3696, 6489, 42321, 64524, 7896, 8679, 963;
з) 789, 567, 347, 1212, 6626, 5648, 4232, 36454, 57896, 86794;
и) 11662, 4581, 1239, 3626, 9648, 56232, 64548, 89668, 79464;
к) 3456, 67894, 5432, 6546, 7552, 8642, 8876, 8988, 18848;
л) 34625,8765, 1120, 6455, 6450, 5645, 15875, 25985, 6880;
м) 2244, 6654, 4846, 8976, 6874, 3246, 5552, 5642, 5876, 25988.

4. Вычислить арифметическое, геометрическое и гармоническое средние для чисел:

а) 130, 270, 3469, 1260, 26884, 86426, 8670, 8679, 9924, 62991;
б) 310, 415, 348, 7000, 7040, 3755, 7895, 7545, 9712, 13748;
в) 1357, 2348, 3158, 2543, 3578, 3468, 8524, 8656, 9834, 9564;
г) 6268, 7564, 6786, 6498, 6576, 6792, 6896, 7678, 6464, 7876;
д) 5165, 5685, 5840, 4955, 5166, 5168, 5325, 6145, 5896, 5236;
е) 4293, 4527, 6543, 4123, 3626, 5648, 4283, 6454, 4396, 4444;
ж) 7753, 7613, 8612, 7696, 7889, 7521, 7554, 7896, 8679, 7963;
з) 9789, 9567, 9347, 9212, 8626, 8648, 8232, 9454, 8965, 8694;
и) 1662, 1581, 1239, 3626, 2648, 6232, 6454, 2668, 4642, 1778;
к) 24561, 67894, 15432, 26546, 37552, 18642, 18876, 18988;
л) 5625, 5765, 5120, 5455, 6450, 5645, 5875, 5985, 5880, 6123;
м) 3454, 6654, 4846, 3976, 6874, 3246, 3552, 5642, 3876, 3988.

5. Определить медиану и моду для чисел:

а) 132, 148, 171, 132, 133, 145, 139, 132, 146, 139, 147, 138, 146, 148, 146, 147, 166, 170, 140, 146, 132, 147, 172, 132, 132, 147, 146, 133, 132, 147, 171, 146, 132, 146, 146, 133, 134, 134, 145, 145, 146, 148, 146, 147, 172;

б) 215, 217, 215, 215, 216, 215, 216, 216, 219, 217, 219, 215, 218, 215, 217, 217, 217, 215, 217, 219, 215, 215, 217, 219, 217, 217, 215, 217, 219, 215, 215, 219, 215, 215, 215, 216, 217, 217, 218, 218, 219, 219, 215, 215, 215;

в) 344, 357, 372, 357, 372, 344, 357, 357, 372, 357, 372, 344, 357, 372, 357, 372, 344, 357, 357, 372, 357, 372, 357, 372, 344, 357, 357, 372, 357, 357, 357, 357, 372, 357, 372, 357, 372, 344, 357, 357, 372, 357, 372, 357, 372;

г) 832, 748, 671, 732, 833, 645, 739, 832, 646, 739, 847, 638, 746, 748, 846, 647, 766, 770, 840, 846, 832, 647, 672, 732, 732, 647, 746, 833, 832, 747, 871, 846, 732, 746, 746, 733, 734, 834, 845, 645, 646, 648, 646, 647, 772;

д) 515, 517, 515, 516, 516, 516, 516, 516, 519, 517, 519, 515, 517, 515, 517, 517, 517, 515, 517, 519, 515, 515, 517, 519, 517, 517, 515, 517, 519, 516, 515, 519, 515, 515, 516, 516, 517, 517, 518, 518, 519, 518, 515, 515, 515;

е) 268, 267, 272, 257, 272, 268, 268, 257, 272, 257, 272, 254, 257, 268, 257, 268, 244, 257, 268, 272, 257, 272, 257, 272, 244, 257, 268, 272, 268, 257, 257, 258, 272, 268, 268, 257, 272, 244, 257, 257, 272, 257, 272, 257, 268, 257, 268, 244, 257, 268, 272, 257, 272, 257, 272, 244, 257, 268, 244, 257, 268;

ж) 163, 148, 161, 132, 163, 145, 139, 132, 161, 139, 147, 168, 146, 148, 166, 147, 166, 176, 160, 146, 132, 147, 172, 162, 163, 147, 146, 133, 163, 167, 161, 146, 162, 146, 166, 133, 164, 134, 165, 145, 166, 148, 166, 147, 167, 166, 176, 160, 146, 132, 147, 172, 162, 163, 147, 146, 133, 163, 167, 161, 146, 162, 146, 166, 133, 164, 163, 148, 161, 132, 167, 161, 146, 162, 146, 166, 133;

з) 415, 217, 415, 315, 316, 215, 416, 216, 419, 217, 219, 415, 218, 215, 317, 217, 317, 215, 417, 219, 315, 215, 217, 219, 417, 417, 315, 217, 219, 415, 315, 219, 215, 215, 315, 216, 317, 217, 317, 418, 219, 219, 215, 315, 315;

и) 444, 574, 472, 457, 572, 444, 557, 557, 472, 557, 572, 544, 457, 472, 457, 572, 344, 557, 457, 472, 457, 572, 457, 572, 444, 557, 457, 472, 457, 457, 457, 557, 572, 557, 572, 557, 572, 544, 457, 457, 472, 557, 472, 457, 472;

к) 4132, 6148, 5171, 6132, 5133, 5145, 5139, 5132, 5146, 4139, 4147, 4138, 5146, 5148, 6146, 6147, 6166, 6170, 4140, 4146, 6132, 6147, 6172, 4132, 4132, 6147, 5146, 5133, 5132, 5147, 5171, 4146, 4132, 4146, 4146, 5133, 5134, 5134, 5145, 6145, 4146, 4148, 4146, 4147, 5172, 5534, 7089, 9067, 2134;

л) 8215, 8217, 8215, 8215, 9216, 8215, 8216, 8216, 8219, 8217, 8219, 8215, 8218, 8215, 8217, 8217, 7217, 7215, 7217, 8219, 8215, 8215, 8217, 8219, 8217, 8217, 8215, 9217, 8219, 8215, 9215, 8219, 8215, 8215, 9215, 6216, 8217, 6217, 8218, 8218, 8219, 8219, 8215, 8215, 9215;

м) 744, 757, 772, 757, 772, 744, 757, 757, 772, 757, 772, 744, 757, 772, 757, 772, 744, 757, 757, 772, 757, 772, 757, 772, 744, 757, 757, 772, 757, 757, 757, 757, 772, 757, 772, 757, 772, 744, 757, 757, 772, 757, 772, 757, 772.

6. Для вектора *v* найти эксцесс и коэффициент асимметрии:

а) *v* = (2, 6; 3, 4; 2, 6; 3, 4; 3, 0; 4, 2; 3, 4; 3, 4; 3, 0; 4, 2; 3, 0; 3, 0; 3, 4; 3, 4; 3, 4; 3, 8; 3, 4; 3, 4; 3, 8; 3, 8; 4, 2; 4, 2; 3, 4; 4, 2; 4, 2; 3, 4; 3, 0; 3, 8; 3, 8; 4, 2; 4, 0);

б) *v* = (48; 52; 52; 56; 56; 60; 64; 60; 64; 60; 60; 64; 64; 64; 64; 68; 68; 68; 72; 72; 68; 68; 68; 72; 72; 72; 72; 68; 68; 68; 72; 72; 68; 72; 60; 58; 58);

в) *v* = (10, 2; 10, 4; 10, 6; 10, 8; 10, 8; 10, 8; 11; 11; 11; 11; 11, 6; 11, 6; 11, 8; 12, 0; 11, 2; 11, 2; 11, 4; 11, 4; 11, 4; 11, 21; 10, 8; 11, 1; 11,05; 10, 9; 10, 9; 11; 11);

г) *v* = (2, 8; 2, 4; 2, 8; 2, 4; 3, 0; 2, 6; 2, 4; 2, 4; 3, 0; 2, 2; 2, 8; 3, 0; 2, 4; 2, 4; 2, 4; 2, 8; 2, 4; 2,4; 2, 8; 2, 8; 2, 2; 3, 2; 3, 4; 2, 2; 2, 2; 2, 4; 3, 0; 2, 8; 2, 8; 2, 2; 3, 0);

д) *v* = (4, 82; 5, 12; 5, 22; 5, 16; 5, 16; 4, 68; 4, 68; 5, 26; 5, 64; 5, 62; 5, 16; 4, 64; 4, 64; 4, 64; 4, 64; 4, 68; 4, 68; 4, 68; 4, 72; 5, 72; 4, 68; 4, 68; 4, 68; 4, 72; 4, 72; 4, 72; 4, 72; 5, 68; 4, 68; 4, 68; 4, 72; 4, 72; 4, 68; 4, 72; 5, 16; 4, 58; 5, 58);

е) *v* = (17, 2; 16, 4; 17, 6; 17, 8; 16, 8; 17, 8; 17, 1; 17, 1; 17, 1; 17, 1; 17, 6; 17, 6; 16, 8; 17, 4; 17, 2; 17, 2; 17, 4; 16, 4; 17, 4; 17, 2; 16, 8; 17, 1; 16, 4; 17, 61; 17, 81; 16, 8; 17, 4; 17, 6; 17, 8);

ж) *v* = (8, 6; 8, 4; 7, 6; 6, 4; 7, 0; 7, 2; 6, 4; 7, 4; 8, 0; 8, 2; 8, 0; 8, 0; 8, 4; 7, 4; 8, 4; 7, 8; 6, 4; 6, 4; 7, 8; 7, 8; 8, 2; 8, 2; 8, 4; 7, 2; 7, 2; 8, 4; 8, 0; 7, 8; 7, 8; 6, 2; 7, 0);

з) *v* = (1, 48; 1, 524; 1, 52; 1, 561; 1, 562; 1, 60; 1, 64; 1, 60; 1, 64; 1, 60; 1, 60; 1, 64; 1, 64; 1, 64; 1, 64; 1, 68; 1, 68; 1, 68; 1, 72; 1, 72; 1, 68; 1, 68; 1, 68; 1, 72; 1, 72; 1, 72; 1, 72; 1, 68; 1, 68; 1, 68; 1, 72; 1, 72; 1, 68; 1, 72; 1, 60; 1, 58; 1, 58; 1, 68);

и) *v* = (12; 14; 16; 18; 18; 18; 10; 10; 10; 10; 16; 16; 11; 12; 11; 12; 11;14; 14; 11; 10; 11; 11; 10; 10;11; 11; 16; 18; 18; 18; 10; 10; 10; 10; 16; 16; 11;14; 14; 11; 10; 11; 11; 10; 10; 11; 11; 18; 10; 18; 18; 10; 10; 10; 16; 10; 11);

к) *v* = (7, 96; 8, 41; 7, 68; 7, 94; 7, 82; 7, 82; 7, 84; 7, 94; 7, 91; 7.84; 8, 23; 8, 29; 7, 74; 7, 65; 7, 84; 7, 84; 8, 25; 8, 04; 7, 94; 7, 82; 7, 82; 7, 84; 7, 94; 7, 91; 6, 82);

л) *v* = (548; 552; 552; 556; 556; 560; 564; 560; 564; 560; 560; 564; 564; 564; 564; 568; 568; 548; 472; 572; 568; 568; 568; 572; 570; 571; 572; 569; 568; 568; 572; 572; 468; 472; 460; 558; 558; 568; 572; 570; 571; 572; 569);

м) *v* = (23, 2; 24, 4; 23, 6; 23, 8; 23, 8; 23, 8; 21, 1; 23, 6; 23, 1; 23, 4; 23, 6; 23, 6; 23, 8; 23, 0; 23, 2; 23, 2; 24, 4; 23, 4; 23, 4; 23, 2; 23, 8; 24, 02; 24, 2; 23, 9; 23, 9; 24, 02; 24, 03; 23, 2; 23, 2; 24, 4; 23, 4; 23, 4; 23, 2; 24, 4; 23, 6; 23, 8; 21, 1).

7. Вычислить среднее квадратическое отклонение и дисперсию для следующих чисел:

а) 10; – 4; 6; 6; – 4; 6; 10; 10; 10; 10; 10; – 4; 6; 6; – 4; 6; 10; 6; 10; – 4; 6; 6; 10; 6; – 4; 6; – 4; 6; 10; 10; 10; – 4; 6; 6; – 4; 6; 10;

б) 3; 5; 5; 7; 4; 7; 7; 7; 8; 8; 9; 5; 7; 4; 7; 7; 8; 5; 5; 7; 4; 7; 3; 5; 5; 7; 7; 8; 8; 9; 5; 7; 4; 7; 7; 8; 5; 5; 4; 7; 3; 8; 8; 9; 5; 7; 4; 7;

в) 131; 135; 137; 137; 140; 140; 141; 140; 140; 142; 140; 140; 143; 148; 150; 176; 137; 140; 140; 141; 140; 140; 131; 135; 137; 137; 135; 137; 137;

г) 548; 552; 552; 556; 556; 560; 564; 560; 564; 560; 560; 564; 564; 564; 564; 568; 568; 548; 472; 572; 568; 568; 568; 572; 570; 571; 572; 569; 556;

д) 17, 6; 17, 6; 16, 8; 17, 4; 17, 2; 17, 2; 17, 4; 16, 4; 17, 4; 17, 2; 16, 8; 17, 1; 17, 1; 17, 9; 17, 4; 17, 1; 17, 1; 16, 4; 17, 6; 17, 8; 16, 8; 16, 4; 17, 6; 17, 8; 16, 8; 17, 6; 17, 6; 16, 8; 17, 4; 17, 2; 17, 2; 17, 4;

е) 8215; 8217; 8215; 8215; 9216; 8215; 8216; 8216; 8219; 8217; 8219; 8215; 8218; 8215; 8217; 8217; 7217; 7215; 7217; 8219; 8215; 8215; 8217; 9216; 8215; 8216; 8216; 8219; 8217; 8219; 8215; 8218; 8215;

ж) 83, 2; 74, 8; 67, 1; 73, 2; 83, 3; 64, 5; 73, 9; 83, 2; 64, 6; 73, 9; 84, 7; 63, 8; 74, 6; 74, 8; 84, 6; 64, 7; 76, 6; 77, 6; 84, 3; 84, 6; 83, 2; 64, 7; 67, 2; 73, 2; 73, 2;

з) 3, 63; 3, 48; 3, 161; 3, 132; 3, 163; 3, 145; 3, 139; 3, 132; 3, 161; 3, 139; 3, 147; 3, 168; 3, 146; 3, 148; 3, 166; 3, 147; 3, 166; 3, 17621; 3, 16011; 3, 146; 3, 132; 3, 147; 3, 17212; 3, 1621; 3, 163; 3, 147; 3, 146; 3, 133; 3, 163; 3, 147; 3, 166; 3, 176;

и) 6, 81; 6, 77; 7, 72; 5, 87; 7, 72; 7, 68; 8, 68; 7, 57; 7, 72; 6, 57; 6, 72; 5, 7411; 5, 872; 6, 58; 5, 79; 6, 88; 6, 74; 6, 57; 6, 68; 7, 62; 6, 57; 7, 72; 6, 87; 6, 72; 7, 54; 7, 57; 7, 68; 6, 87; 6, 98; 5, 87; 7, 72; 7, 68; 6, 872; 6, 7232; 6, 68; 7, 62; 6, 57; 7, 72; 6, 87; 6, 72; 7, 54;

к) 17, 2; 16, 4; 17, 6; 17, 8; 16, 8; 17, 8; 17, 1; 17, 1; 17, 1; 17, 1; 17, 6 17, 6; 16, 8; 17, 4; 17, 2; 17, 2; 17, 4; 16, 4; 17, 4; 17, 2; 16, 812; 17, 1; 17, 1; 17, 9; 16, 8; 17, 6; 17, 8; 16, 8; 17, 8; 17, 1; 17, 1; 17, 1; 17, 11; 17, 61; 17, 6; 16, 8; 17, 4; 17, 2; 17, 2; 17, 4; 16, 8; 17, 4; 17, 2; 17, 2; 17, 421; 16, 4; 17, 4; 17, 2; 16, 8; 17, 1; 17, 9; 16, 8;

л) 1, 63; 1, 68; 1, 61; 1, 32; 1, 63; 1, 45; 1, 39; 1, 321; 1, 61; 1, 39; 1, 47; 1, 68; 1, 46; 1, 48; 1, 66; 1, 47; 1, 66; 1, 76; 1, 60; 1, 46; 1, 321; 1, 4712; 1, 66; 1, 76; 1, 60; 1, 46; 1, 32; 1, 32; 1, 63; 1, 45; 1, 391; 1, 3212; 1, 61; 1, 48; 1, 66; 1, 47; 1, 66; 1, 76;

м) 2, 681; 2, 671; 2, 72; 2, 57; 2, 72; 2, 68; 2, 68; 2, 57; 2, 72; 2, 57, 2, 57; 2, 72; 2, 44; 2, 57; 2, 68; 2, 72; 2, 68; 2, 44; 2, 571; 2, 681; 2, 721; 2, 57; 2, 68, 2, 68, 2, 57; 2, 72; 2, 72; 2, 68; 2, 57; 2, 68; 2, 44; 2, 571; 2, 7221; 2, 571; 2, 72; 2, 57; 2, 72; 2, 44; 2, 68; 2, 57.

8. Найти значение плотности вероятности, функции распределения и вектор из 17 значений, распределённых по биноминальному закону, если:

а) $k = 3$; $n = 21$; $p = 0, 3$; б) $k = 5$; $n = 25$; $p = 0, 4$;
в) $k = 7$; $n = 50$; $p = 0, 6$; г) $k = 4$; $n = 67$; $p = 0, 2$;
д) $k = 5$; $n = 34$; $p = 0, 7$; е) $k = 7$; $n = 50$; $p = 0, 5$;
ж) $k = 6$; $n = 42$; $p = 0, 4$; з) $k = 5$; $n = 33$; $p = 0, 7$;
и) $k = 9$; $n = 50$; $p = 0, 5$; к) $k = 3$; $n = 22$; $p = 0, 8$.
л) $k = 3$; $n = 22$; $p = 0, 4$; м) $k = 5$; $n = 23$; $p = 0,5$;

9. Найти значение плотности вероятности, функции распределения и вектор из 20 значений, распределённых по закону χ^2, если:

а) $x = 1$; $d = 4$; б) $x = 2$; $d = 2$; в) $x = 3$; $d = 6$; г) $x = 5$; $d = 2$;
д) $x = 1$; $d = 6$; е) $x = 2$; $d = 6$; ж) $x = 3$; $d = 2$; з) $x = 5$; $d = 4$;
и) $x = 1$; $d = 2$; к) $x = 2$; $d = 4$; л) $x = 3$; $d = 4$; м) $x = 5$; $d = 6$.

10. Найти значение плотности вероятности, функции распределения и вектор из 15 значений, распределённых по нормальному закону, если:

а) $x = 3$; $\mu = 4$; $\sigma = 2$; б) $x = 3$; $\mu = 4$; $\sigma = 0, 5$;
в) $x = 4$; $\mu = 3$; $\sigma = 1$; г) $x = 5$; $\mu = 2$; $\sigma = 2$;
д) $x = 6$; $\mu = 4$; $\sigma = 0, 5$; е) $x = 8$; $\mu = 3$; $\sigma = 1$;
ж) $x = 7$; $\mu = 1$;$\sigma = 2$; з) $x = 9$; $\mu = 4$; $\sigma = 0, 5$;
и) $x = 12$; $\mu = 3$; $\sigma = 1$; к) $x = 3$; $\mu = 2$; $\sigma = 2$;
л) $x = 3$; $\mu = 4$; $\sigma = 1$; м) $x = 4$; $\mu = 4$; $\sigma = 1$.

11. Построить гистограмму с 15 произвольными значениями, используя функции *hist* и *histogram*.

12. Вычислить число сочетаний:

а) C_{10}^{3}; б) C_{25}^{4}; в) C_{36}^{7}; г) C_{25}^{7}; д) C_{37}^{10}; е) C_{50}^{21}; ж) C_{52}^{33}; з) C_{25}^{11};
и) C_{27}^{13}; к) C_{44}^{21}; л) C_{48}^{33}; м) C_{24}^{11}; н) C_{21}^{13}; о) C_{48}^{23}; п) C_{24}^{15}; р) C_{21}^{11}.

13. Вычислить число размещений:

а) A_{10}^{5}; б) A_{15}^{7}; в) A_{20}^{3}; г) A_{20}^{7}; д) A_{36}^{15}; е) A_{36}^{21}; ж) A_{52}^{33}; з) A_{25}^{11};
и) A_{27}^{13}; к) A_{21}^{9}; л) A_{19}^{7}; м) A_{25}^{17}; н) A_{19}^{15}; о) A_{26}^{19}; п) A_{38}^{25}; р) A_{25}^{13}.

14. Определить уравнение линейной регрессии для каждой из заданных таблиц:

а)

x	9	11	13	15	19	21	23	25	27	29
y	5	7, 5	8, 8	9, 7	12, 4	14, 3	15, 3	17, 45	17, 34	18, 5

б)

x	0	1	2	3	4	5	6	8	9	10
y	–1	1, 1	3, 1	5, 2	6, 9	9, 05	10, 98	11, 52	14, 34	15, 5

в)

x	1, 1	2, 2	3, 3	4, 4	5, 5	6, 6	7, 7	8, 8	9, 9
y	0, 5	1, 21	2, 4	3, 88	4, 15	5, 55	7, 58	9, 34	10, 95

г)

x	0, 2	0, 4	0, 5	0, 7	0, 9	1, 2	2, 3	2, 9	3, 7	4, 4
y	1, 2	1, 5	1, 8	2, 7	3, 4	4, 3	5, 8	7, 45	8, 34	10, 5

д)

x	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19
y	3, 4	4, 2	5, 1	6, 2	7, 9	8, 05	9, 98	10, 52	13, 34	14, 5

е)

x	11	12	13	14	15	16	17	18	19
y	115	121	132	134	145	155	164	172	183

ж)

x	0, 5	0, 9	1, 3	1, 7	2, 1	2, 4	2, 7	3, 1	3, 5	3, 9
y	1, 9	1, 95	2, 3	2, 47	2, 54	2, 63	2, 78	2, 65	2, 44	2, 35

з)

x	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19
y	5, 2	5, 4	5, 7	5, 9	6, 3	6, 95	7, 18	7, 52	7, 74	8, 25

и)

x	0	11	23	35	47	59	71	83	95	107
y	4	6	12	20	30	34	50	53	12	3

к)

x	1, 2	1, 6	2, 5	2, 7	3, 1	3, 5	4, 3	4, 9	5, 5	6, 4
y	1, 2	1, 5	1, 8	2, 7	3, 4	4, 3	5, 8	7, 45	8, 34	10, 5

л)

x	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19
y	3, 6	6, 2	12, 1	18, 2	27, 9	38, 5	42, 8	50, 5	60, 3	64, 5

м)

x	10	20	30	40	50	60	70	80	90
y	135	181	182	184	185	185	182	178	173

15. Сгладить экспериментальные зависимости с помощью функций *medsmooth*, *ksmooth* и *supsmooth*:

а)

x	25	30	28	50	20	40	32	36	42	38	44
y	28	31	36	52	24	36	33	35	45	40	47

б)

x	76	71	57	49	70	69	26	68	59	71	74
y	81	85	52	52	70	63	33	83	82	83	87

в)

x	0, 18	0, 12	0, 12	0, 08	0, 08	0, 12	0, 19	0, 12	0,18
y	0, 16	0, 09	0, 08	0, 152	0, 17	0, 11	0, 14	0, 083	0, 159

г)

x	2, 5	3, 6	2, 8	5, 1	2, 4	4, 9	3, 2	3, 6	4, 8	3, 8	4, 9
y	25, 2	31, 2	36	52	24, 8	35	33	31, 5	34, 5	34	47

д)

x	76	71	50	49	70	69	68	68	59	71	74
y	81	85	52	52	77	63	84	83	62	83	87

е)

x	0, 15	0, 19	0, 19	0, 12	0, 115	0, 12	0, 19	0, 12	0,18
y	0, 16	0, 09	0, 08	0, 152	0, 17	0, 11	0, 13	0, 13	0, 084

ж)

x	25	30	28	50	20	40	32	36	42	38	44	46	44	30	32	50
y	38	48	40	49	24	45	47	55	65	50	67	65	67	52	49	51

з)

x	96	90	97	94	90	99	96	98	99	97	94
y	16	15	19	13	10	21	19	18	20	17	14

и)

x	0, 8	0, 9	1, 1	0, 8	0, 8	1, 2	0, 9	1, 12	0, 85
y	0, 6	0, 65	0, 68	0, 65	0, 71	0, 71	0, 69	0, 83	0, 649

к)

x	2, 5	3, 0	2, 8	5, 0	2, 0	4, 0	3, 2	3, 6	4, 2	3, 8	4, 4
y	38	41	46	62	34	46	43	45	55	50	57

л)

x	46	48	50	48	50	46	44	48	46	50	52	48	46	50	52
y	15	17	10	21	12	19	14	19	17	13	7	17	18	11	5

м)

x	0, 1	0, 2	0, 3	0, 4	0, 3	0, 2	0, 1	0, 4	0,1
y	0, 16	0, 09	0, 08	0, 152	0, 17	0, 11	0, 14	0, 143	0, 159

16. Осуществить предсказание значений на основе заданных, используя $m = 3$:

а)

x	0, 18	0, 12	0, 08	0, 12	0, 19	0, 32	0, 27	0, 22	0, 34
y	0, 16	0, 09	0, 13	0, 103	0, 14	0, 33	0, 31	0, 24	0, 28

б)

x	15	20	16	22	24	14	18	20	25
y	15	22	14	25	29	16	20	24	30

в)

x	0, 27	0, 32	0, 33	0, 28	0, 34	0, 39	0, 42	0, 53
y	0, 16	0, 19	0, 18	0, 165	0, 21	0, 168	0, 281	0, 32

г)

x	0, 15	0, 17	0, 19	0, 21	0, 29	0, 32	0, 37	0, 42	0, 44
y	0, 16	0, 19	0, 23	0, 26	0, 34	0, 38	0, 43	0, 49	0, 58

д)

x	150	200	216	222	224	240	280	290	325
y	11	23	34	35	36	41	45	47	51

е)

x	1, 27	1, 32	1, 33	1, 38	1, 47	1, 52	1, 59	1, 62	1, 73
y	0, 18	0, 21	0, 28	0, 19	0, 1	0, 21	0, 168	0, 181	0, 13

ж)

x	0, 18	0, 24	0, 3	0, 36	0, 42	0, 48	0, 54	0, 6	0, 7
y	16, 4	16, 9	17, 3	17, 8	18, 4	17, 3	17, 2	16, 9	16, 58

з)

x	115	120	136	212	244	314	382	420	525
y	615	622	814	825	929	916	820	814	730

и)

x	0, 7	1, 32	1, 6	2, 28	3, 27	4, 32	5, 39	6, 32	7, 33
y	0, 6	0, 9	1, 18	1, 65	1, 74	2, 21	2, 68	1, 18	1, 1

к)

x	18	21	28	32	39	42	47	52	53
y	4, 16	4, 29	4, 33	4, 53	5, 14	5, 33	5, 31	5, 24	5, 21

л)

x	1, 5	2, 0	2, 6	3, 2	4, 4	4, 8	5, 3	5, 8	6, 5
y	15, 1	22, 8	24, 6	25, 4	29, 7	25, 8	20, 9	19, 5	16, 7

м)

x	0, 7	0, 8	0, 9	1, 1	1, 27	1, 32	1, 39	1, 43	1, 5
y	0, 64	0, 69	0, 78	0, 65	0, 64	0, 61	0, 58	0, 63	0, 69

6.7. Выводы

1. *Mathcad* позволяет вычислять статистические функции.
2. В *Mathcad* есть функции для поиска точечных и интервальных оценок.
3. В *Mathcad* есть набор функций распределения дискретных и непрерывных случайных величин.
4. *Mathcad* позволяет строить различные гистограммы.
5. В *Mathcad* присутствуют функции для определения уравнения регрессии различного вида.
6. *Mathcad* позволяет решать задачу сглаживания экспериментальной зависимости.
7. В *Mathcad* используется линейный алгоритм предсказания значений.